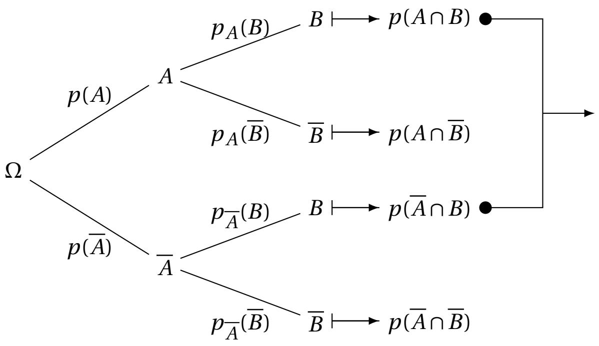
Les Probabilités

Représentation par un arbre pondéré



Formule des probabilités totales

$$\boxed{\begin{aligned} p(B) &= p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B)\\ &= p(A)\times p_A(B) + p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)\end{aligned}}$$

Formules

Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$
Formule de la réunion	$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$
Si A et B indépendants	$p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$

Loi binomiale

On répète n fois de manière **identiques** et **indépendantes** une épreuve à deux issues (*Succès* - *Échec*) dont la probabilité du succès est p. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Alors X suit alors une loi binomiale de paramètres n et p noté $X\sim\mathcal{B}(n,p)$.

$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$ $\boxed{E(X) = np}$ $\boxed{V(X) = np(1-p)}$ $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

La probabilité de réalisation **d'au moins 1 succès** est $\boxed{p(X\geqslant 1) = 1 - p(X=0)}$ avec $\binom{n}{0} = 1$

Dénombrement

*Tirage **successif avec remise** de p éléments parmi n (ordre et répétition)*	n^p
*Tirage **successif sans remise** de p éléments parmi n (ordre, pas de répétition)*	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
*Tirage **successif sans remise** de n éléments parmi n (nombre de permutations)*	$n! = n\times(n-1)!$ $= n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$
*Tirage **simultané** de p éléments parmi n (pas d'ordre, pas de répétition)*	$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Variables aléatoires

∗ *Loi de probabilité de X*

X	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$p(X=x_i)$	p_0	p_1	$\ldots$	p_n

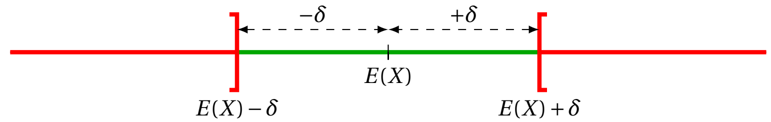
∗ *Formules*

Espérance (moyenne)	$E(X) = \sum x_i\times p_i = x_1\times p_1 + x_2\times p_2 + \ldots + x_n\times p_n$
Variance	$V(X) = \sum\left(x_i - E(X)\right)^2\times p_i = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$
Écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

∗ *Somme de variables aléatoires indépendantes*

Espérance	$E(aX) = aE(X)$ $E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$
Variance	$V(aX) = a^2V(X)$ $V(X_1+X_2+\ldots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_n)$
Moyenne d'un échantillon	$M_n = \dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$
Espérance d'un échantillon	$E(M_n) = E(X)$
Variance d'un échantillon	$V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



Majoration de la probabilité que l'écart à la moyenne soit **supérieure ou égale** à δ

$$\boxed{p\left(|X-E(X)|\geq\delta\right)\leq\frac{V(X)}{\delta^2}}$$

Minoration de la probabilité que l'écart à la moyenne soit **strictement inférieure** à δ

$$\boxed{p\left(|X-E(X)|<\delta\right)\geq 1-\frac{V(X)}{\delta^2}}$$

Inégalité de Markov

$$\boxed{p\left(X\geq\delta\right)\leq\frac{E(X)}{\delta}}$$

Les Fonctions

Polynôme du 1er degré

$$ax+b=0 \iff x=\frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

Polynôme du 2nd degré

$\Delta = b^2-4ac$

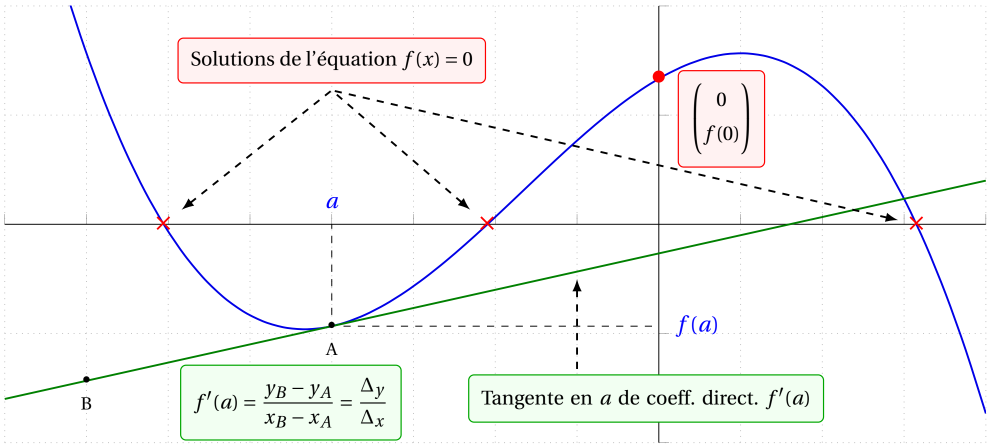
- $\Delta<0$ → Pas de racines dans $\mathbb{R}$
- $\Delta=0$ → $x_0=\frac{-b}{2a}$
- $\Delta>0$ → $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	sig. a	0	sig. $(-a)$	0	sig. a

Lecture graphique



Équation de la tangente en a

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Tableaux des dérivées

x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\ln x$	e^x	u^n	uv	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	$\ln u$	e^u
nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$nu'u^{n-1}$	$u'v+uv'$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$

Tableaux des primitves

x^n	$\frac{1}{x^n}$ $(n\geq 2)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$u'u^n$	$\frac{u'}{u^n}$ $(n\geq 2)$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{x^{n-1}}$	$2\sqrt{x}$	$\ln x$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{u^{n-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\ln u$	e^u

Limites du type

$$\frac{k}{\pm\infty}=0^{\pm} \qquad \frac{k}{0^{\pm}}=\pm\infty \qquad \pm\infty\times\pm\infty=\pm\infty$$

⚠ Faire la règle des signes

Forme indéterminée (FI)

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\times\infty \qquad (+\infty)+(-\infty)$$

⚠ On développe ou on factorise et/ou on utilise les croissances comparées

Limites de référence

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Croissances comparées

$$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

Interprétation graphique des limites

Asymptote horizontale d'équation $y=\ell$ en $\pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\ell$
Asymptote verticale d'équation $x=a$	$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$

Propriétés de l'exponentielle et du logarithme

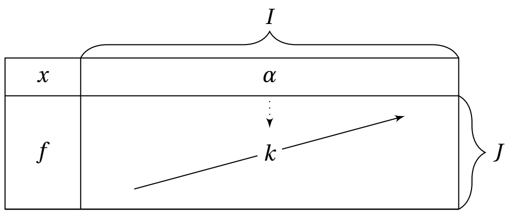
$$e^a\times e^b=e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b}=e^{a-b} \qquad \left(e^a\right)^n=e^{a\times n} \qquad e^{\ln x}=x$$

$$\ln(a\times b)=\ln a+\ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln(a)^n=n\times\ln a \qquad \ln e^x=x$$

Position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$: On étudie le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$

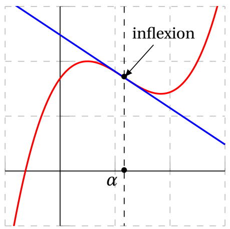
Théorème des valeurs intermédiaires

- f est **continue** et **strictement croissante (ou décroissante)** sur I.
- $f(x)$ prend ses valeurs dans J.
- $k \in J$ donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in I$.



Convexité

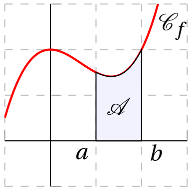
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	↘		↗
f	concave		convexe
$\mathscr{C}_f$	en-dessous des tangentes		au-dessus des tangentes



Calcul intégral

$\mathscr{A}$ est l'aire du domaine de plan limité par :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses d'une part;
- les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'autre part.



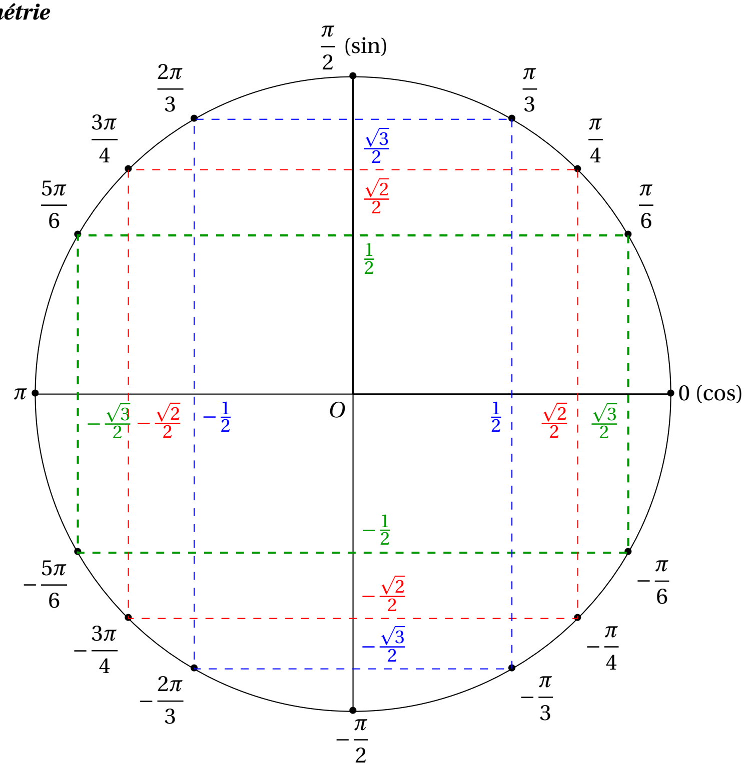
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Valeur moyenne	$V_m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Positivité	$f(x) \geqslant 0$ sur $[a;b] \iff \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
Linéarité	$\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(x)\mathrm{d}x + \beta g(x)\mathrm{d}x\big) = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
Intégration par parties	$\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

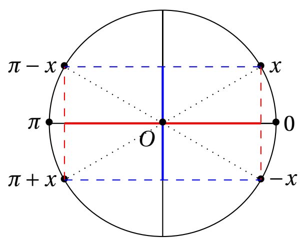
Équations différentielles

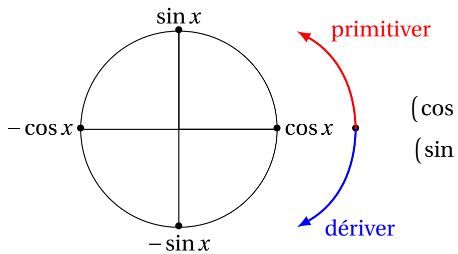
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$	$y(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$
$y' = ay + f$	$y(x) = Ce^{ax} +$ une solution particulière

Trigonométrie



Encadrement	$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
Pythagore	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Périodicité	$f(x+T) = f(x) \iff f$ est T-périodique
Paire	$f(-x) = f(x) \iff \mathscr{C}_f$ symétrique par rappot à $(y'Oy)$
Impaire	$f(-x) = -f(x) \iff \mathscr{C}_f$ symétrique par rappot à O





$$\big(\cos u\big)' = -u'\sin u$$
$$\big(\sin u\big)' = u'\cos u$$

Les Suites

Nature	Arithmétique	Géométrique
$u_{n+1}=f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1}=u_n+r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1}=qv_n \end{cases}$
$u_n=f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0+nr \\ &= u_1+(n-1)r \\ &= u_2+(n-2)r \\ &= \cdots \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0\times q^n \\ &= v_1\times q^{n-1} \\ &= v_2\times q^{n-2} \\ &= \cdots \end{aligned}$
Somme de u_p à u_n	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}}\times\dfrac{\text{premier}+\text{dernier}}{2}$	$\text{premier}\times\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Pour démontrer	$u_{n+1}-u_n=\cdots=r$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\cdots=q$ $v_{n+1}=\cdots=qv_n$

Limite de q^n

$$\lim_{n\to+\infty}q^n=\begin{cases} 0 & \text{si } -1<q<0 \text{ ou } 0<q<1 \\ +\infty & \text{si } q>1 \\ 1 & \text{si } q=1 \\ \text{diverge} & \text{si } q\leqslant -1 \end{cases}$$

Théorèmes de comparaison

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty \\ v_n\geqslant u_n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty \\ v_n\leqslant u_n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n=-\infty}$$

Théorème des gendarmes

$$\begin{cases} v_n\leqslant u_n\leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\ell \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell}$$

Théorèmes de convergence monotone

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème du point fixe

$$\begin{cases} f \text{ est continue} \\ u_{n+1}=f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow (u_n) \text{ converge vers } \ell \text{ solution de l'équation } f(x)=x$$

Sens de variation

$$u_{n+1}-u_n\begin{cases} >0 \Longrightarrow (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ <0 \Longrightarrow (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ =0 \Longrightarrow (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

Raisonnement par récurrence

1. **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial
2. **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

   [*Écrire la propriété au rang n*] $\Longrightarrow$ [*Écrire la propriété au rang $n+1$*]

   $\left.\vdots\right\}$ Démo

3. **Conclusion** : la propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que la propriété est vraie pour tout n.

Remarque :
En ce qui concerne la démonstration, on démarre généralement de l'hypothèse de récurrence et :
- soit on compose avec une fonction f croissante
- soit on "reconstruit" l'expression de u_{n+1}

Algorithmes Python

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n+5$.

```
########## Programme CALCUL #########
# calcule et affiche le terme de
# rang n demandé par l'utilisateur

# demander la valeur de n
n = int(input("n = "))
# initialisation u0 = 1
u = 1
# boucle de calcul
for i in range(n):
    u = 2 * u + 5
print("u = ", u)
```

```
########## Programme SEUIL ##########
# affiche le rang n à partir duquel
# un devient supérieur ou égal à M

# initialisation : u0 = 1
n = 0
u = 1
while u < M: # tant que un < M
    # on calcule le terme suivant
    n = n + 1
    u = 2 * u + 5
print("n = ", n)
```

Remarques :
- dans l'algorithme de calcul, on peut afficher **tous les termes** jusqu'à u_n en plaçant `print("u = ", u)` dans la boucle `for`
- dans l'algorithme de seuil, on peut être amené à remplacer la condition `u < M` par `u > M`

Modélisation de problème par une suite géométrique

Augmentation de $t\,\%$ $\Longrightarrow q=1+\dfrac{t}{100}$ Diminution de $t\,\%$ $\Longrightarrow q=1-\dfrac{t}{100}$

Géométrie dans l'espace

➼ *Calcul de $\overrightarrow{AB}$ et de sa norme*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } AB = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

➼ *Formule du milieu K de $[AB]$*

$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

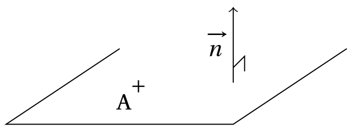
➼ *Colinéarité de deux vecteurs ou comment montrer que trois points sont alignés*

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles soit $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$

➼ *Orthogonalité de deux vecteurs*

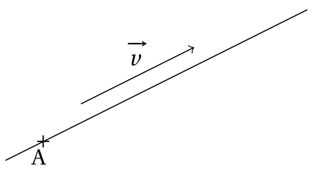
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul soit $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz' = 0$

➼ *Équation cartésienne de plan*



Le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a;b;c)$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$.
On détermine d en remplaçant x, y et z par les coordonnées d'un point qui **appartient** au plan (ici A).

➼ *Représentation paramétrique de droite*



La droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a;b;c)$ passant par A a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

➼ *Intersection entre deux droites*

On résout le système de 3 équations composé des équations des deux droites, par exemple :

$$\begin{cases} 2t+1 = -k+3 \\ t-1 = k+2 \\ 3t+2 = -2k-1 \end{cases}$$

➼ *Intersection entre un plan et une droite*

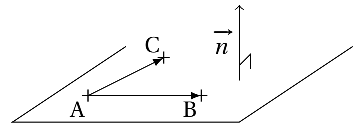
On résout le système de 4 équations composé des 3 équations de la droite et de l'équation du plan, par exemple :

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-1 \\ z = 3t+2 \\ 2x-3y+z-1 = 0 \end{cases}$$

➼ *Comment montrer qu'un vecteur est normal à un plan*

On montre que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs du plan en utilisant le produit scalaire :

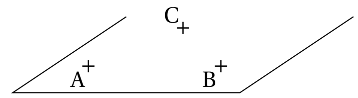
$$\overrightarrow{n} \perp (ABC) \iff \begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$



➼ *Comment montrer que trois points définissent un plan*

On montre que ces trois points ne sont pas alignés en utilisant la non colinéarité de deux vecteurs :

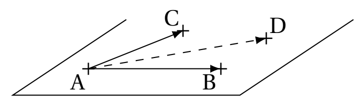
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'} \neq \frac{z}{z'}$$



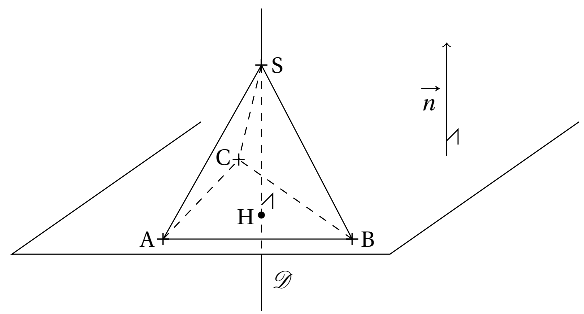
➼ *Comment montrer que trois vecteurs ou quatre points sont coplanaires*

On montre que l'un des trois vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$



➼ *Situation classique à connaître*



- Les points A, B et C définissent un plan dont on connaît une équation cartésienne
- La droite $\mathscr{D}$ passant par S est orthogonale au plan (ABC) et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$
- On définit H comme le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)
- On cherche les coordonnées de H point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan (ABC)
- On peut calculer la distance SH qui est la distance du point S au plan (ABC)
- On peut calculer le volume de la pyramide SABC :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{ABC}} \times \text{SH} \quad \text{avec} \quad \mathscr{A}_{\text{ABC}} = \frac{\textit{base} \times \textit{hauteur}}{2}$$