Codage en Python

Strucures de contrôle

```python
# Définition de fonction
def add(a, b):
    c = a + b  # affectation de a + b à c
    return c   # retourne la valeur de c
# Test conditionnel SI ALORS SINON
if a == b:
    ... # bloc de code exécuté si a = b
elif a != c:
    ... # bloc de code exécuté si a différent de c
else:
    ... # bloc de code exécuté par défaut
# Boucle POUR
for i in range(0:10): # i prend successivement les valeurs de 0 à 10 non compris
    ... # bloc de code exécuté pour chaque valeur de i
for l in "bonjour": # l prend successivement les lettres du mot bonjour
    ... # bloc de code exécuté pour chaque valeur de l
# Boucle TANT QUE
while u < M:
    ... # bloc de code exécuté tant que u < M
```

Variables

```python
n = 1 # n est de type entier
x = 1.0 # x est de type réel
s = "chaîne" # s est de type string
b = True # ou False, b est un booléen
```

```python
l = [] # l est de type liste
l.append(e) # ajoute e à la liste
l.remove(e) # supprime e de la liste
k = l[0] # accès à l'élément de rang 0
```

Entrées/Sorties

```python
print("n = ", n) # affiche la valeur de n
s = input("s = ") # demande la valeur de s => s est de type string
n = int(s) # convertit s en un entier
x = float(s)  # convertit s en un réel
```

Opérations sur les variables

```python
n = n + 1   # ajoute 1 à n
u = 2 * u   # multiplie u par 2
x = 1 / 3   # x = 0.3333333333333333
k = 5 ** 2  # élève 5 au carré et l'affecte à k
q = a // b  # affecte à q le quotient de la division euclidienne de a par b
r = a % b   # affecte à r le reste de la division euclidienne de a par b
```

Les Polynômes

Polynômes du 1er degré

$$ax+b=0 \iff x=\frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

Polynômes du 2nd degré

∗ *Formes possibles :*

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2+bx+c && \text{(forme développée)}\\ &= a(x-\alpha)^2+\beta && \text{(forme canonique)}\\ &= a(x-x_0)^2 \text{ ou } a(x-x_1)(x-x_2) && \text{(forme factorisée si elle existe)} \end{aligned}$$

∗ *Pour dresser le tableau de variations :*

$$\boxed{\alpha=\frac{-b}{2a}} \qquad \boxed{\beta=P(\alpha)}$$

$a>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P	$\searrow$	β	$\nearrow$

$a<0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P	$\nearrow$	β	$\searrow$

∗ *Pour déterminer les racines du polynôme, la forme factorisée ou dresser le tableau de signes :*

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- $\xrightarrow{\Delta<0}$ Pas de racines dans $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

- $\xrightarrow{\Delta=0}$ $x_0=\frac{-b}{2a}$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

- $\xrightarrow{\Delta>0}$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

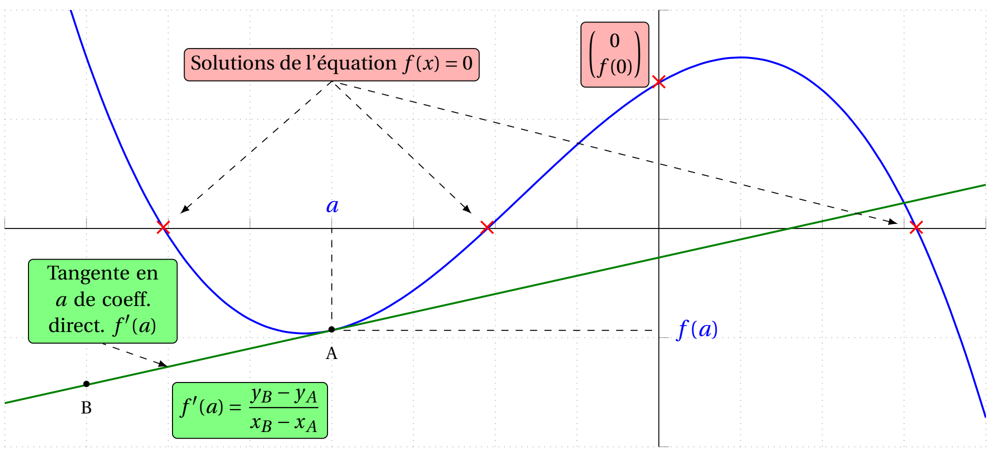
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	sig. a	0	sig. $(-a)$	0	sig. a

∗ *Propriétés des racines :*

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Les Fonctions

➼ *Lecture graphique*



➼ *Taux de variation entre a et $a+h$*

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

➼ *Équation de la tangente en a*

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

➼ *Tableaux des dérivées*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

f	f'
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
u^n	$nu'u^{n-1}$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$

➼ *Pour étudier les variations d'une fonction f :*

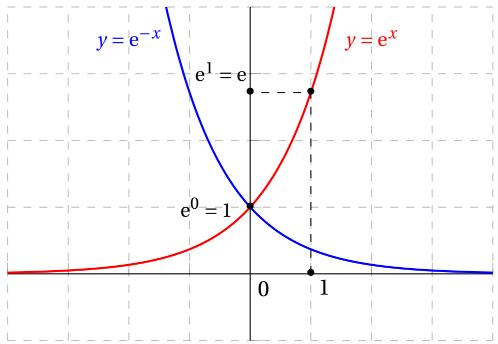
1. je calcule $f'(x)$
2. j'étudie le signe de $f'(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis les variations de f : $\boxed{f'(x) < 0 \implies f \searrow}$ ou $\boxed{f'(x) > 0 \implies f \nearrow}$

➼ *Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$:*

1. je calcule la différence $d(x) = f(x) - g(x)$
2. j'étudie le signe de $d(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$: $\boxed{d(x) < 0 \implies \mathscr{C}_f < \mathscr{C}_g}$ ou $\boxed{d(x) > 0 \implies \mathscr{C}_f > \mathscr{C}_g}$

➼ *Propriétés de la fonction exponentielle*

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel X, $e^X > 0$



$$\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^1 &= e \quad (\simeq 2{,}718) \\
e^{a+b} &= e^a \times e^b \\
(e^a)^n &= e^{a \times n} \\
e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} \\
e^{-b} &= \frac{1}{e^b}
\end{aligned}$$

➼ *Application concrète*

En économie	*Notation*	*Remarques*
Coût total de production	$C(x)$ ou $C_T(x)$	coûts fixes : $C(0)$
Coût marginal	$C_m(x) = C'(x)$	coût de la dernière unité produite
Coût moyen	$C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$	coût moyen unitaire
Recette ou chiffres d'affaires	$R(x) = p \times x$	p est le prix de vente unitaire
Bénéfice	$B(x) = R(x) - C(x)$	⚠ attention au $-$ devant $C(x)$

En cinématique	*Notation*	*Remarques*
Position de l'objet	$f(t)$	position initiale : $f(0)$
Vitesse instantanée de l'objet	$v(t) = f'(t)$	à ne pas confondre avec la vitesse moyenne $v = \dfrac{d}{t}$

Les Suites

Deux modes de génération

* Explicite ou fonctionnelle (en fonction de n) : $u_n = f(n)$
* Récurrent (en fonction du terme précédent) : $u_{n+1} = f(u_n)$

Deux types de suite particulière

Nature	Arithmétique	Géométrique
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = q v_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$u_n = u_0 + nr$ $= u_p + (n-p)r$	$v_n = v_0 \times q^n$ $= v_p \times q^{n-p}$
Somme de u_p à u_n	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	$\text{premier} \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \cdots = r$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \cdots = q$ $v_{n+1} = \cdots = q v_n$

Variations de suites

1. je calcule la différence $u_{n+1} - u_n$
2. j'étudie son signe
3. j'en déduis les variations de la suite u

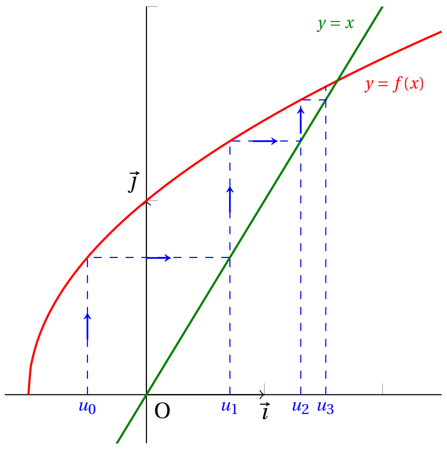
$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \implies (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \implies (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \implies (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

⚠ Si $u_n = f(n)$ alors u a les mêmes variations que la fonction f qui la génère.

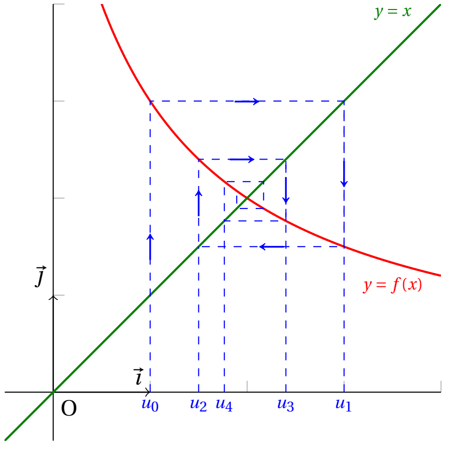
Calculer avec des pourcentages

$t\%$ de q	$\dfrac{t}{100} \times q$
Augmenter q de $t\%$	$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \times q$
Diminuer q de $t\%$	$\left(1 - \dfrac{t}{100}\right) \times q$
Taux d'évolution entre v_0 et v_1	$\dfrac{v_1 - v_0}{v_0} \times 100$

Construction graphique des termes de (u_n) dans le cas d'une définition récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$



Suite croissante



Mode "escargot" (suite alternée)

1. On part de u_0
2. On prend son image par f : $u_1 = f(u_0)$
3. On "rabat" u_1 sur l'axe des abscisses par "projection horizontale" sur $y = x$
4. On répète cette procédure avec u_1, puis u_2 ...

Algorithmes Python à connaître

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

```python
########## Programme CALCUL #########
# calcule et affiche le terme de
# rang n demandé par l'utilisateur

# demander la valeur de n
n = int(input("n = "))
# initialisation u0 = 1
u = 1
# boucle de calcul
for i in range(n):
    u = 2 * u + 5
print("u = ", u)
```

```python
########## Programme SEUIL ##########
# affiche le rang n à partir duquel
# un devient plus grand que M

# initialisation : u0 = 1
n = 0
u = 1
while u < M: # tant que un < M
    # on calcule le terme suivant
    n = n + 1
    u = 2 * u + 5
print("n = ", n)
```

Remarques :

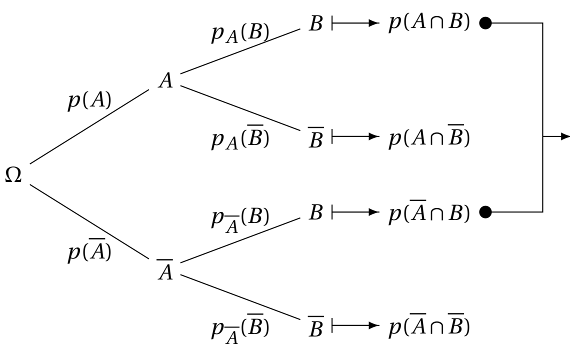
- dans l'algorithme de calcul, on peut afficher **tous les termes** jusqu'à u_n en plaçant `print("u = ", u)` dans la boucle `for`
- dans l'algorithme de seuil, on peut être amené à remplacer la condition `u < M` par `u > M`

Les Probabilités

Formules fondamentales

Probabilité de A	$p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments totals}}$
Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$
Formule de la réunion	$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$
Si A et B indépendants	$p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$
Complémentarité de A et de $\overline{A}$	$p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Représentation par un arbre pondéré



Formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B) \\ &= p(A)\times p_A(B) + p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

Représentation par un tableau

	A	$\overline{A}$	Total
B	$p(A\cap B)$	$p(\overline{A}\cap B)$	$p(B)$
$\overline{B}$	$p(A\cap\overline{B})$	$p(\overline{A}\cap\overline{B})$	$p(\overline{B})$
Total	$p(A)$	$p(\overline{A})$	**1**

Remarques :

- dans un tableau, on peut remplacer les probabilités par des effectifs
- dans un tableau, on lit "les intersections" et on calcule les probabilités conditionnelles
- dans un arbre, on lit les probabilités conditionnelles et on calcule "les intersections"

Notion de variables aléatoires

∗ *Loi de probabilité de X :*

X	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_0)$	$p(X=x_1)$	$\dots$	$p(X=x_n)$

∗ *Formules à connaître*

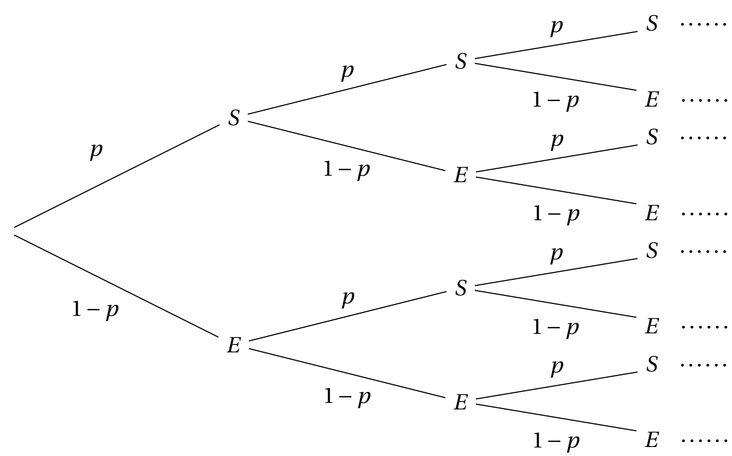
Éspérance (ou moyenne) de X	$E(X) = \sum x_i\times p_i = x_1\times p_1 + x_2\times p_2 + \ldots + x_n\times p_n$
Variance de X	$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \sum x_i^2\times p_i - (E(X))^2$
Écart-type de X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques :

- les valeurs x_i peuvent être de nature très différentes (nombre de boules, somme d'argent, ...)
- l'espérance s'interprète en contexte par rapport à la nature des x_i
- l'écart-type permet de calculer la moyenne des écarts à la moyenne est permet d'accorder plus ou moins d'importance à la moyenne

Répétition d'épreuves à l'identiques

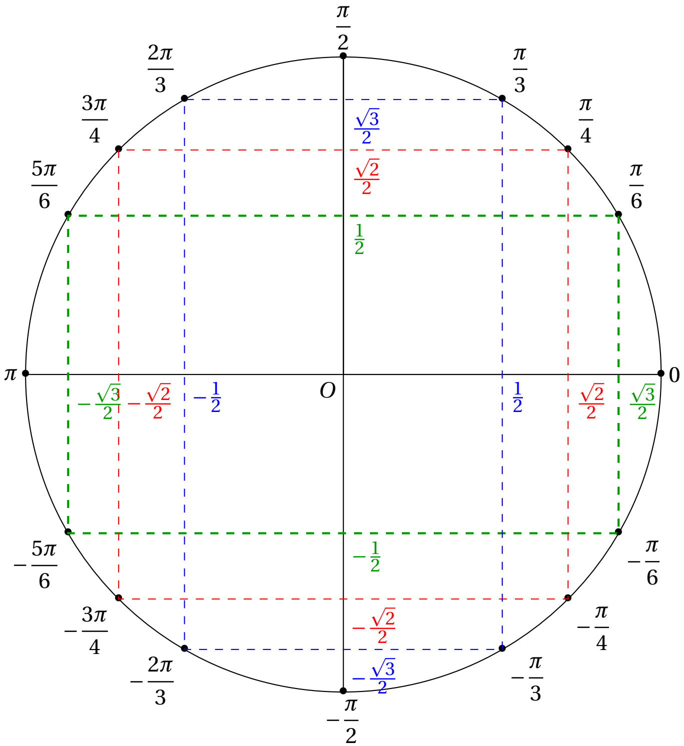
On répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve à deux issues : succès ou échec.



Probabilité d'obtenir exactement n succès	$p(S)^n = p^n$
Probabilité d'obtenir au moins un succès	$1 - p(E)^n = 1 - (1-p)^n$

La Trigonométrie

Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

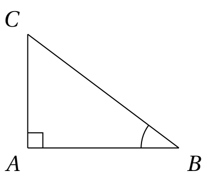


Formules de trigonométrie

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$
$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

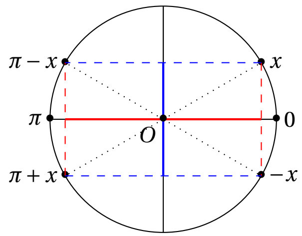
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

Trigonométrie dans le triangle rectangle (SOHCAHTOA ou CAHSOHTOA)



$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

Repérage sur le cercle trigonométrique

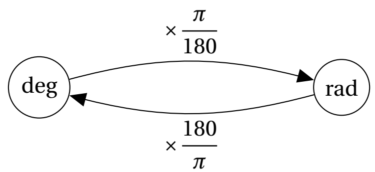


Les cosinus et les sinus sont soit égaux, soit opposés

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Mesure d'angle et conversion

Mesure principale	$\alpha \in]-\pi\,;\pi]$
Mesure secondaire	$\alpha + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^*)$



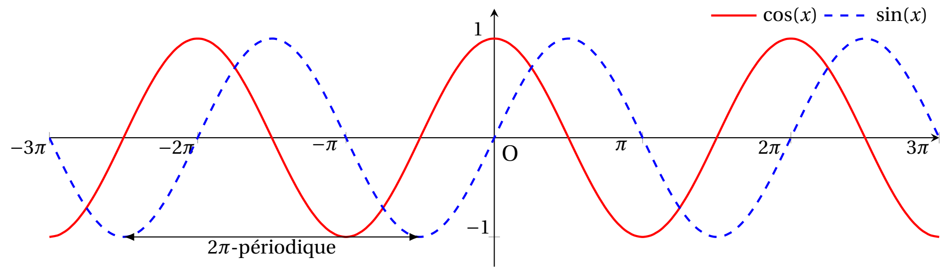
Équations trigonométriques

$$\cos X = \cos a \iff \begin{cases} X = a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ X = -a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin X = \sin a \iff \begin{cases} X = a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ X = \pi - a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Fonctions sinus et cosinus

∗ *Courbes représentatives :*



∗ *Encadrement :* pour tout réel x, on a $\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ et $\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$

∗ *Périodicité :* pour tout réel x, on a $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x)}$ et $\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$

∗ *Parité :* pour tout réel x, on a

$\cos(-x) = \cos(x) \implies$ symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

$\sin(-x) = -\sin(x) \implies$ symétrie par rapport à l'origine O

Le Produit Scalaire

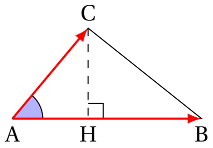
Propiétés importantes

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$	$\left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}\,.\left(k\vec{v}\right) = k\vec{u}\,.\vec{v}$
$\vec{u}\left(\vec{v}\,.\,\vec{w}\right) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

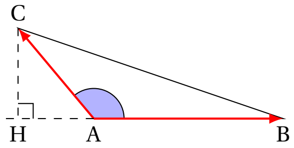
Formules à connaître

∗ *Définition et projection*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}\\ &= \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}\\ &= \pm AB \times AH\\ &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)\end{aligned}$$



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} > 0$



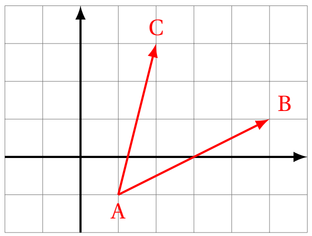
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} < 0$

∗ *Définition analytique*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$$



∗ *Identités remarquables*

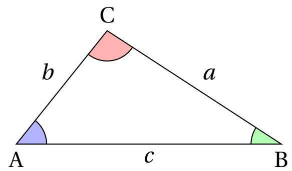
$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$

$$\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right)$$

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right).\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \iff \left(\vec{u} + \vec{v}\right).\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$$

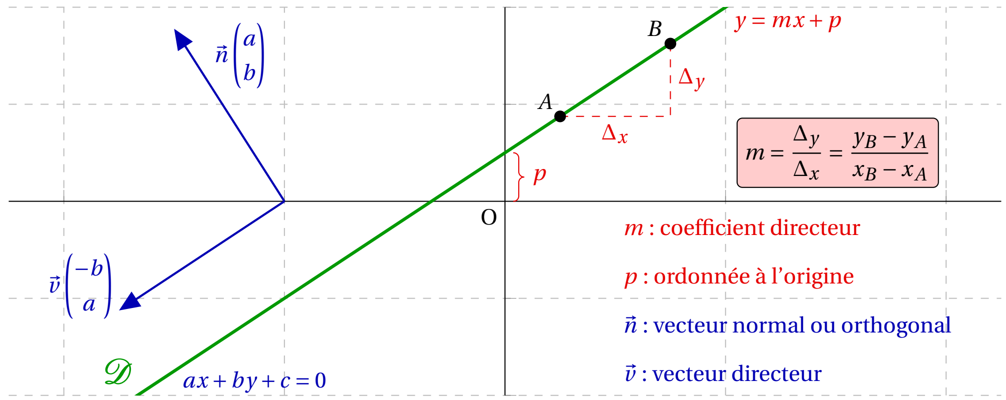
Formules d'Al-Kashi et loi des sinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\widehat{C}$$
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$



La Géométrie Analytique

Équation réduite et cartésienne de droite

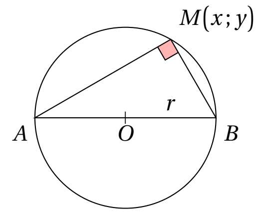


Appartenance d'un point à une doite $\mathscr{D}$

- je détermine un point de $\mathscr{D}$ en fixant x à une valeur quelconque et en isolant y
- je teste si un point appartient ou non à la droite en remplaçant x et y dans l'équation de $\mathscr{D}$

Équation cartésienne de cercle

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} &\iff \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0\\ &\iff \begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x - x_B\\ y - y_B\end{pmatrix} = 0\\ &\iff (x - x_A)(x - x_B) - (y - y_A)(y - y_B) = 0\\ OM^2 = r^2 &\iff (x - x_O)^2 - (y - y_O)^2 = r^2\end{aligned}$$



Colinéarité de vecteurs et alignement de points

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires} \iff xy' - x'y = 0$$

$$\iff \vec{u} = k\vec{v} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$A, B \text{ et } C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases}x_E - x_A = \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_C - x_A)\\ y_E - y_A = \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_C - y_A)\end{cases}$$

Intersections de droites

$$\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \iff \begin{cases}\text{équation de } \mathscr{D}_1\\ \text{équation de } \mathscr{D}_2\end{cases}$$