

# BANQUE D'ÉPREUVES FESIC

Concours Puissance 11 - LaSalle Beauvais

Admission en 1<sup>ère</sup> année après bac

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*Samedi 16 mai 2015 de 13h30 à 16h00*

### INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice est **interdit** ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

### INSTRUCTIONS POUR REMPLIR LA FEUILLE DE RÉPONSES

Les épreuves de la FESIC sont des questionnaires à correction automatisée. Votre feuille sera corrigée automatiquement par une machine à lecture optique. Vous devez suivre scrupuleusement les instructions suivantes :

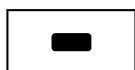
Pour remplir la feuille de réponses, vous devez utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire ou bleue. Ne jamais raturer, ni gommer, **ni utiliser un effaceur**. Ne pas plier ou froisser la feuille.

1. Collez l'étiquette code-barres qui vous sera fournie (le code doit être dans l'axe vertical indiqué). Cette étiquette, outre le code-barres, porte vos nom, prénom, numéro de table et matière. Vérifiez bien ces informations.

Exemple :



2. Noircissez les cases correspondant à vos réponses :



Faire



Ne pas faire

Pour modifier une réponse, il ne faut ni raturer, ni gommer, ni utiliser un effaceur. Annuler la réponse par un double marquage (cocher F et V) puis reporter la nouvelle réponse éventuelle dans la zone tramée [zone de droite]. La réponse figurant dans la zone tramée n'est prise en compte que si la première réponse est annulée. Les réponses possibles sont :

V	F	V	F	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	vrai
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	faux
<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	abstention
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	abstention
<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	vrai
<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	faux
<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	abstention

**Attention** : vous ne disposez que d'une seule feuille de réponses. En cas d'erreur, vous devez annuler votre réponse comme indiqué ci-dessus. Toutefois, en cas de force majeure, une seconde feuille pourra vous être fournie par le surveillant.

## Exercice n°1

### Etude de fonction.

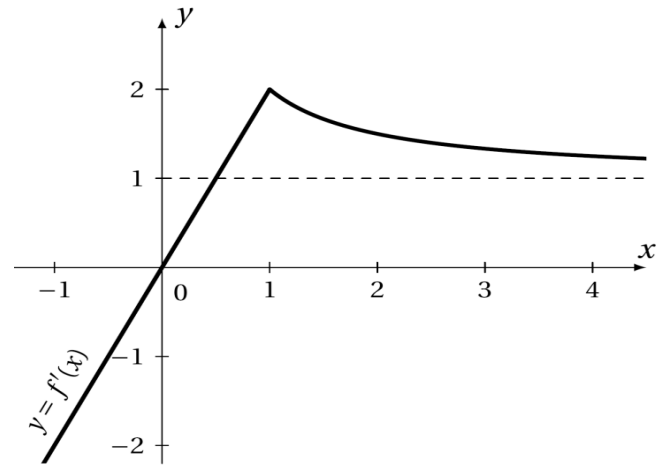
Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  de courbe représentative  $(\Gamma)$  dont la fonction dérivée  $f'$  a pour représentation graphique la courbe ci-contre.

On admet que  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) La courbe  $(\Gamma)$  admet une asymptote horizontale en  $+\infty$ .
- b) Pour tout  $x \in ]-\infty; 1]$ ,  $f(x) = x^2$ .

On suppose dans le c) et d) que  $(\Gamma)$  passe par  $\Omega(1; 1)$ .

- c) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ .
- d)  $f(2) = \ln 2 + 2$ .



## Exercice n°2

### Fonction définie par deux paramètres.

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs fixés et  $f$  la fonction définie sur  $I = [-a; a]$  par

$f(x) = \frac{b}{a} \times \sqrt{a^2 - x^2}$  de courbe représentative  $(\Gamma)$ .

- a) Pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = \frac{b}{2 \times \sqrt{a^2 - x^2}}$ .
- b) Si  $a = 6$  et  $b = 3$  alors pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq 3$ .
- c) Si  $a = b = 1$ , alors l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$  admet deux solutions sur  $I$ .
- d) Si  $a = b$  alors  $(\Gamma)$  admet deux tangentes parallèles à la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 5$ .

### Exercice n°3

#### Bases de la géométrie.

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Si la droite  $(D)$  a pour équation paramétrique 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$$
 avec  $t$  réel, alors le vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  est

un vecteur directeur de  $(D)$ .

b) Soit  $a > 0$ . Si  $ABC$  est un triangle équilatéral direct de côté  $a$ , alors  $\overline{AB} \cdot \overline{CA} = \frac{a^2}{2}$ .

Pour le c) et d), on suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

c) Le nombre  $(1 + i)^4$  est un nombre réel négatif.

d) L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $|z + 4 - 3i| = 5$  est un cercle passant par l'origine du repère.

### Exercice n°4

#### Questions de logique.

Agnan, Clotaire, Eudes, Geoffroy et Rufus ne s'entendent pas tous très bien. Pour la fête d'anniversaire qu'organisait le petit Nicolas, ils avaient prévenu :

- Clotaire refuserait de venir si Rufus était présent.
- Eudes ne viendrait que s'il était accompagné d'Agnan ou de Rufus.
- Quant à Geoffroy et Agnan, ils n'iraient nulle part l'un sans l'autre.

a) Si Clotaire n'est pas venu à la fête, alors Rufus était présent.

b) Si Rufus était absent, alors Clotaire est venu à la fête.

c) Si Agnan est venu, alors Geoffroy et Eudes aussi.

d) Si Eudes et Clotaire sont venus, alors Geoffroy était lui aussi présent.

**Exercice n°5****Petite démonstration.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  par  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$  de courbe représentative  $(\Gamma)$  et

$$I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

a) Pour tout réel  $x \in D_f$ ,  $f'(x) = -\frac{2x(1-x)}{(1-2x)^2}$ .

b)  $(\Gamma)$  admet deux tangentes parallèles à la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x + 5$ .

c) Si  $x \in I$ , la fonction  $k : x \mapsto \ln(f(x))$  admet comme dérivée la fonction  $k' : x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{2}{2x-1}$ .

d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la suite  $(u_n)$  par 
$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

Afin d'étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , on effectue le raisonnement suivant :

« Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on souhaite démontrer la relation " $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ".

Si  $x \in I$  alors  $f'(x) > 0$  et la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Supposons que la relation soit vraie à un certain rang  $k \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $u_{k+1} - u_k > 0$ .

Par définition de la suite  $(u_n)$  nous avons  $u_{k+2} = f(u_{k+1})$  et  $u_{k+1} = f(u_k)$  avec  $f$  strictement croissante sur  $I$  ; donc si  $u_{k+1} > u_k$  alors nous pouvons en déduire que  $u_{k+2} = f(u_{k+1}) > u_{k+1} = f(u_k)$  soit  $u_{k+2} > u_{k+1}$ , ce qui nous permet de conclure que la relation est vraie au rang  $k+1$ .

Conclusion : la relation est héréditaire et, comme la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , nous pouvons en déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement croissante ».

Ce raisonnement est correct.

**Exercice n°6****Calculs de limites.**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$ .

c) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - x - 1}$ . La courbe  $(\Gamma)$  représentative de la fonction  $f$  admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{\sin(n) - 2n}{n+1}$  converge vers 0.

**Exercice n°7****Calcul intégral.**

- a)  $J = \int_1^e \frac{2x+1}{x^2} dx = 3 + \frac{1}{e}$ .
- b)  $K = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{20}$ .
- c) Soit  $\alpha$  un réel strictement positif,  $\int_0^\alpha \frac{x}{1+x} dx = \alpha - \ln(1+\alpha)$ .
- d) Soit  $L = \int_e^{e^2} -x \ln(x) dx$ . On a :  $e^2(1-e^2) \leq L \leq \frac{e^2}{2}(1-e^2)$ .

**Exercice n°8****Fonction exponentielle.**

Soit  $F_1$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $F_1(x) = e^{-x} - 2x$  et  $g(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x}+2}$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction  $F_1$  et par  $(x_n)$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $x_0 = 1$  et  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

- a) L'équation  $F_1(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ .

Dans les questions b), c) et d), on admet la convergence de la suite  $(x_n)$ .

- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ .
- c) Si  $a \in \mathbb{R}$ , alors la tangente à (C) en  $x = a$  coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse  $g(a)$ .

On donne le programme Prog ci-contre :

- d) Pour  $n = 5$ , Prog affiche 0,3125 et 0,375, nous pouvons en déduire que  $0,3125 < \alpha < 0,375$ .

```

1  VARIABLES
2  A EST_DU_TYPE NOMBRE
3  B EST_DU_TYPE NOMBRE
4  I EST_DU_TYPE NOMBRE
5  F_A EST_DU_TYPE NOMBRE
6  F_B EST_DU_TYPE NOMBRE
7  F_I EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  A PREND_LA_VALEUR 0
10 B PREND_LA_VALEUR 1
11 I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
12 F_A PREND_LA_VALEUR F1(A)
13 F_B PREND_LA_VALEUR F1(B)
14 F_I PREND_LA_VALEUR F1(I)
15 TANT_QUE (abs(A-B)>0.1) FAIRE
16   DEBUT_TANT_QUE
17     SI (F_A * F_I > 0) ALORS
18       DEBUT_SI
19         A PREND_LA_VALEUR I
20         F_A PREND_LA_VALEUR F1(A)
21         I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
22         F_I PREND_LA_VALEUR F1(I)
23       FIN_SI
24     SINON
25       DEBUT_SINON
26         B PREND_LA_VALEUR I
27         F_B PREND_LA_VALEUR F1(B)
28         I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
29         F_I PREND_LA_VALEUR F1(I)
30       FIN_SINON
31     FIN_TANT_QUE
32   AFFICHER A
33   AFFICHER B
34 FIN_ALGORITHME

```

**Exercice n°9****Fonction exponentielle et logarithme.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$ ,  $g$  la fonction définie sur  $]1 ; +\infty[$  par

$$g(x) = 2x - (x-1) \times \ln(x-1) \text{ et } \phi \text{ la fonction définie sur } ]1 ; +\infty[ \text{ par } \phi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

a)  $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$ .

b)  $\phi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2}$ .

c)  $g$  admet un minimum en  $x = e + 1$ .

On admet qu'il existe une unique solution  $\alpha$  à l'équation  $g(x) = 0$  sur  $]e + 1 ; +\infty[$ .

d)  $f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

**Exercice n°10****Suite et trigonométrie.**

Soit  $(u_n)$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ .

a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+8} > u_n$ .

b) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $-3 \leq u_n \leq 3$ .

c) La suite  $(u_n)$  est monotone.

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$ .

## Exercice n°11

### Suite de nombres complexes.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et on considère la suite

$$(z_n) \text{ de nombres complexes définie, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ par : } \begin{cases} z_0 &= 2 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$

On pose  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  et on définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)$  par  $u_n = |z_n|$ .

a) La suite  $(u_n)$  est géométrique.

b) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$ .

c) A partir du rang  $n = 4$ , le point  $A_n$  appartient au disque de centre  $O$  et de rayon  $R = \frac{1}{2}$ .

d) Pour tout entier naturel  $n$ , le triangle  $OA_n A_{n+1}$  est isocèle et rectangle.

## Exercice n°12

### Géométrie et complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On définit  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $z_A = 1$  et  $z_B = 2i$  et  $T$  la transformation complexe du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{z-2i}{z}$ .

a) L'image du point d'affixe  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  par la transformation  $T$  est le point d'affixe  $1 + 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

b) L'ensemble des points  $M$  du plan complexe tels que  $OM' = 1$  représente la médiatrice du segment  $[OB]$ .

c)  $M'$  appartient au cercle de centre  $A$  et de rayon 1 si et seulement si le point  $M$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $R = 2$ .

d)  $z'$  est un nombre complexe imaginaire pur si et seulement si le point  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[OB]$ .



### Exercice n°13

#### Variables aléatoires réelles : Cours - Calculs.

$X$  est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ .

- a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P(X > n) = \frac{1}{e^n}$ .
- b) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P_{X>n}(X > n+1) = P(X < 1)$ .

Soit  $\sigma > 0$ ,  $Y$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale  $\mathcal{N}(9; \sigma^2)$  et  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \frac{Y-9}{\sigma}$ .

- c)  $Z$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0; 1)$ .
- d)  $P(7 \leq Y \leq 11) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right)$ .

### Exercice n°14

#### Probabilités conditionnelles.

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.

S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut  $\frac{1}{9}$ , tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut  $\frac{1}{3}$ .

S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante ; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

- a) La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de  $\frac{1}{9}$ .
- b) La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de  $\frac{25}{81}$ .
- c) Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de  $\frac{7}{9}$ .

On note  $p_n$  ( $n$  étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'événement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la  $n^{\text{ème}}$  représentation ».

- d) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $p_{n+1} = \frac{2-p_n}{9}$ .

## Exercice n°15

### Logique et géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $m$  et  $p$  sont deux réels.

On définit le plan  $(P)$  ayant pour équation cartésienne  $x - y + 2z - 3 = 0$  et  $(\Delta)$  la droite passant par le point

A de coordonnées  $(2; p; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Il existe au moins un réel  $m$  tel que  $(\Delta)$  soit parallèle à  $(P)$ .
- Si  $m = 1$ , alors il existe au moins un réel  $p$  tel que  $(\Delta) \cap (P) = \emptyset$ .
- Si  $m \neq 1$ , alors pour tout réel  $p$ ,  $(\Delta) \cap (P) \neq \emptyset$ .
- Si  $p = 1$ , alors pour tout réel  $m$ ,  $(\Delta) \cap (P) = \{A\}$ .

## Exercice n°16

### Orthogonalité dans l'espace.

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD.

Le point O est le centre du carré ABCD, J est le milieu du segment [SO], F est le milieu du segment [BC]

et K est le point défini par  $\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD}$ .

- $\vec{BK} = -\vec{SB} + \frac{1}{3}\vec{SD}$  et  $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{SB} + \frac{1}{4}\vec{SD}$ .
- B, K et J sont alignés.
- Les plans (BJC) et (SAD) sont sécants suivant une droite  $(\Delta)$  orthogonale à la droite (SF).

Pour le d), on suppose que  $BD = SO$  et on se place dans le repère orthonormé direct  $(O; \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OJ})$ .

- La droite (KJ) coupe le plan (P) d'équation cartésienne  $2x + 3y - z + 4 = 0$  au point  $\Omega$  de coordonnées  $(-1; 0; 2)$ .

