Concours Puissance 11 - LaSalle 2017

Corrigé détaillé de l'épreuve de mathématiques

Réponses aux exercices

➽ Exercice nº 1 : FVVF - *Lecture graphique*

Pour traiter correctement cette question, il faut retenir que $f'(a)$ **est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse** a que l'on peut déterminer de deux manières différentes :

- soit par la technique de l'escalier ;
- soit en notant les coordonnées de deux points A et B **qui appartiennent à la tangente** puis en utilisant la formule $f'(a) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

a) Faux

$*$ *Par le calcul*, $v'(3) = \dfrac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \dfrac{1-3}{2-3} = 2$.

$*$ *Par la technique de l'escalier*, pour aller de H vers G, on réalise le déplacement suivant : $+2$ $+1$

donc $v'(3) = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{+2}{+1} = 2$.

b) Vrai

$$u'(0) = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{3{,}6 - 0}{0{,}4 - 0} = \frac{36}{4} = \frac{\cancel{4} \times 9}{\cancel{4}} = 9.$$

c) Vrai

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(1) = -\frac{v'(1)}{[v(1)]^2} = -\frac{v'(1)}{1^2} = -v'(1).$$

d) Faux

$(u \times v)'(3) = u'(3) \times v(3) + u(3) \times v'(3)$.

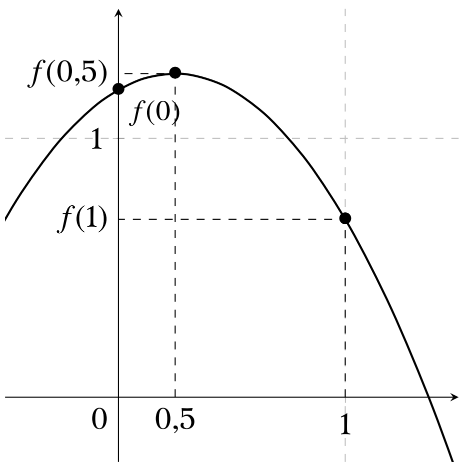
Or $u'(3) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1 - 3{,}6}{3 - 0{,}4} = \dfrac{-2{,}6}{2{,}6} = -1$.

Donc $(u \times v)'(3) = -1 \times 3 + 1 \times 2 = -1$.

Exercice n° 2 : FFFV - *Petites questions de logique sur les fonctions*

Attention à ne pas se laisser piéger par le graphique qui représente la courbe de la fonction g des questions *c)* et *d)*.
De plus, il est fort probable que le rédacteur du sujet ait commis une petite coquille à la question *d)*. La question prenant tout son sens si on lit $g'(x) \times g(x) = 0$ à la place de $f'(x) \times f(x) = 0$.

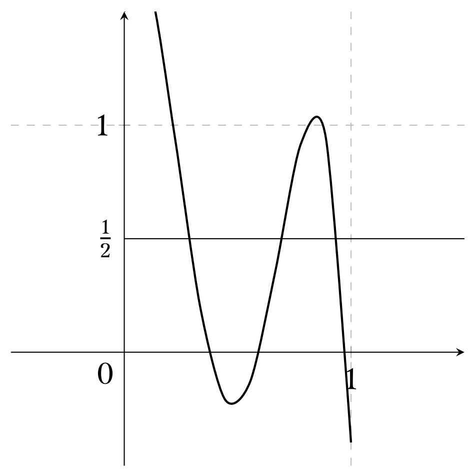
a) Faux



On peut trouver une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;1]$ qui est telle que $f(0{,}5)$ n'est pas compris entre $f(0)$ et $f(1)$ comme le montre le graphique ci-contre.

b) Faux

On peut trouver une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;1]$ qui est telle que $f(0) > 1$ et $f(1) < 0$ et pour laquelle l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet plus d'une solution comme le montre le graphique ci-contre.



c) Faux

Si $g(x) = 0$ alors $x = -2$ ou $x = 0$ ou $x = 4$ (intersection entre l'axe des abscisses et la courbe C_g.

d) Vrai

* Si $x = -1$ ou $x = 2$, $g'(x) = 0$ car la tangente est horizontale et par conséquent $g'(x) \times g(x) = 0$.
* Si $x = 0$ ou $x = 4$, $g(x) = 0$ car C_g coupe l'axe des abscisses et par conséquent $g'(x) \times g(x) = 0$.

➽ Exercice n° 3 : VVVV - *Suites et algorithmes*

a) Vrai

$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4\times 3} = \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{3+12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+4\times 12}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9\times 7}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

b) Vrai

Pour montrer que (v_n) est géométrique, on va montrer que v_{n+1} peut s'écrire sous la forme $v_{n+1} = qv_n$ avec q un coefficient à déterminer :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - 4\\
&= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2 - 4\\
&= \frac{u_n^2+12}{4} - \frac{16}{4}\\
&= \frac{u_n^2-4}{4}\\
&= \frac{1}{4}(u_n^2-4)\\
v_{n+1} &= \frac{1}{4}v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0^2 - 4 = -4$.

c) Vrai

(v_n) étant géométrique, on déduit que $v_n = v_0\times q^n = -4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{-4}{4^n}$.

Or $v_n = u_n^2 - 4$ donc $u_n = \sqrt{v_n+4}$ ou $u_n = -\sqrt{v_n+4}$.

(u_n) étant une suite à termes positifs, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{v_n+4}\\
&= \sqrt{\frac{-4}{4^n} + \frac{4\times 4^n}{4^n}}\\
&= \sqrt{\frac{\cancel{4}(4^n-1)}{\cancel{4}\times 4^{n-1}}}\\
&= \sqrt{\frac{4^n-1}{4^{n-1}}}
\end{aligned}$$

d) Vrai

L'algorithme détermine le rang N à partir duquel l'écart entre 2 et un terme de (u_n) devient plus grand qu'une valeur saisie par l'utilisateur et notée E.
Réalisons la trace d'exécution de l'algorithme :

`E`	`N`	`U`	`2-U`	`2-U > E`
0,1	0	0	2	`Vrai`
0,1	1	$\sqrt{3} \simeq 1{,}73$	0,26	`Vrai`
0,1	2	$\dfrac{\sqrt{15}}{2} \simeq 1{,}935$	0,065	`Faux`

Si $E = 0{,}1$ alors l'algorithme affiche en sortie $N = 2$.

Exercice n° 4 : FFFV - *Limites et asymptotes*

a) Faux

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$$

b) Faux

D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}xe^x=0$

c) Faux

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x>0,\ f(x)&=\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}+1}\\&=\frac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\cancel{\sqrt{x}}\times\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\\&=\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\end{array}\right\}\text{par quotient, }\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

Par conséquent, C_f admet la droite d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

d) Vrai

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{x+2}+1=2\\ \lim\limits_{x\to-1^+}x+1=0^+\end{array}\right\}\text{par quotient, }\boxed{\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty}$$

Par conséquent, C_f admet la droite d'équation $x=-1$ comme asymptote verticale.

Exercice n° 5 : FVVF - *Calculs d'intégrales*

a) Faux

$$\begin{aligned}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)^2\right]_0^1 \quad \rightarrow \text{la primitive de } u'u \text{ est } \frac{1}{2}u^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(e^1\right)^2 - \left(e^0\right)^2\right)\\ &= \boxed{\frac{e^2-1}{2}}\end{aligned}$$

b) Vrai

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(2-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[2x+\frac{3}{x}\right]_1^2 \quad \rightarrow \text{la primitive de } \frac{1}{x^n} \text{ est } -\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{x^{n-1}}\\ &= \left(2\times 2+\frac{3}{2}\right)-\left(2\times 1+\frac{3}{1}\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

c) Vrai

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t &= \left[2\sqrt{t}\right]_e^{e^2}\\ &= 2\sqrt{e^2}-2\sqrt{e}\\ &= 2\left(e-\sqrt{e}\right)\\ &= \boxed{2\left(e-e^{\frac{1}{2}}\right)}\end{aligned}$$

d) Faux

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_e^{e^2} \quad \rightarrow \text{la primitive de } u'u \text{ est } \frac{1}{2}u^2\\ &= \frac{1}{2}(\ln(e^2))^2-\frac{1}{2}(\ln(e))^2\\ &= \frac{1}{2}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 1^2\\ &= \boxed{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Exercice n° 6 : FFVF - *Étude de deux fonctions*

a) Faux

Si $x = \dfrac{1}{2}$ alors $x^2 - 1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\dfrac{3}{4} < 0$ et $\ln\left(x^2 - 1\right)$ n'existe pas donc $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ n'existe pas.

b) Faux

$$g'(x) = \left(\ln\left(x^2 - 1\right)\right)' = \frac{\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)} = \frac{2x}{\left(x^2 - 1\right)}$$

c) Vrai

$g\left(\sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2}^2 - 1\right) = \ln 1 = 0$ et $g'\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2 - 1} = 2\sqrt{2}$ donc la tangente à C_g au point d'abscisse $\sqrt{2}$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y = g'\left(\sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) + g\left(\sqrt{2}\right) &\iff y = 2\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) \\ &\iff \boxed{y = 2\sqrt{2}x - 4} \end{aligned}$$

d) Faux

Pour étudier la position relative de C_f par rapport à C_g, on étudie le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x) = \ln(2x) - \ln\left(x^2 - 1\right) = \ln\left(\dfrac{2x}{x^2 - 1}\right)$.

$$\begin{aligned} d(x) > 0 &\iff \ln\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) > 0 \\ &\iff \ln\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) > \ln 1 \\ &\iff \frac{2x}{x^2 - 1} > 1 \\ &\iff \frac{2x}{x^2 - 1} - 1 > 0 \\ &\iff \frac{2x - \left(x^2 - 1\right)}{x^2 - 1} > 0 \\ &\iff \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} > 0 \end{aligned}$$

$x^2 - 1$ s'annule en -1 et 1. Cherchons les racines de $-x^2 + 2x + 1$:
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$ donc $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$d(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Attention aux ensembles de définitions de f et de g. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ et g est définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
On constate que sur l'intervalle $\left]1\,;1+\sqrt{2}\right[$, f et g sont définies et que $d(x)=f(x)-g(x)>0$ donc sur cet intervalle, c'est la courbe C_f qui est située au-dessus de C_g.

➠ Exercice nº 7 : FVFF - *Étude d'une fonction exponentielle*

a) Faux

$f(1) = e^{1^2-2\times 1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

b) Vrai

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-2x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition, } \boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty}$$

c) Faux

$f'(x) = \left(e^{x^2-2x}\right)' = \left(x^2-2x\right)' \times e^{x^2-2x} = (2x-2)e^{x^2-2x} \neq f(x)$

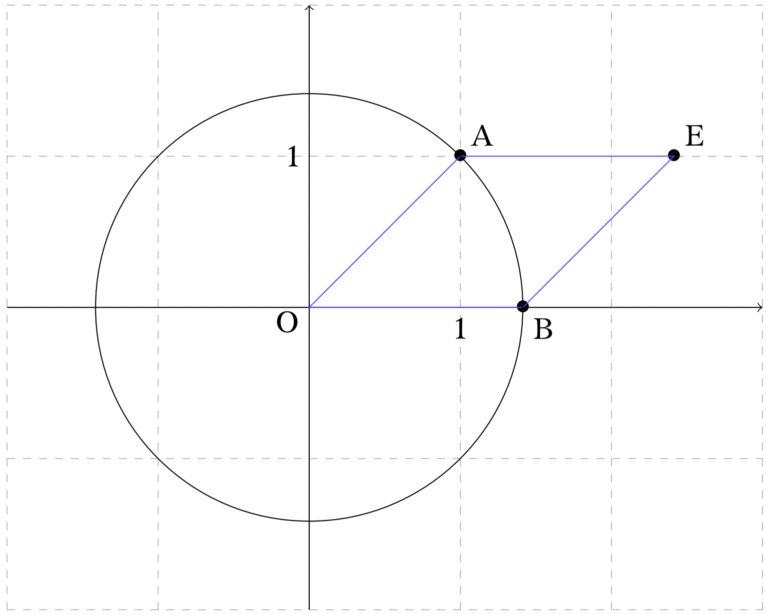
d) Faux

$e^{x^2-2x} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x-2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que f admet sur $\mathbb{R}$ un minimum supérieur à $\dfrac{1}{3}$. En effet, $e < 3$ donc $\dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{3}$. Par conséquent, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3}$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

➽ Exercice n° 8 : FFVF - *Notions de base sur les complexes*



a) Faux

$$|z_A| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \ \arg(z_A) = \theta \text{ avec } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

Donc $z_A = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

b) Faux

B est défini comme le point du cercle de centre O et de rayon $OA = \sqrt{2}$ tel que l'affixe de B soit positive. Ce qui signifie que $z_B = \sqrt{2}$.

c) Vrai

Le quadrilatère $OBEA$ est un losange signifie que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AE}$, donc :

$$\begin{aligned} z_B - z_O = z_E - z_A &\iff z_E = z_B + z_A \\ &\iff z_E = \sqrt{2} + 1 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

d) Faux

$$OE = |z_E| = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

➽ Exercice n° 9 : VVFV - *Petit exercice de probabilité*

a) Vrai

« Une fois sur dix, quand je prends mon vélo au moins l'une des deux roues est crevée » signifie qu'une fois sur dix, soit la roue avant est crevée, soit c'est la roue arrière, soit c'est les deux en même temps : c'est donc la probabilité de l'événement $V \cup R$ d'où $p(V \cup R) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$. De plus, les événements V et R sont indépendants donc $p(V \cap R) = p(V) \times p(R) = 0{,}05 \times p(R)$

b) Vrai

« J'ai constaté que la roue arrière était crevée ; la probabilité que la roue avant le soit également vaut 0,05 » signifie que $p_R(V) = 0{,}05 = p(V)$. Ce qui est vrai puisque les événements R et V sont indépendants.

c) Faux

On cherche $p(R)$ connaissant $p(V)$ et $p(V \cup R)$. On sait que $p(V \cup R) = p(V) + p(R) - p(V \cap R)$ et que $p(V \cap R) = p(V) \times p(R)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
p(V \cup R) = p(V) + p(R) - p(V) \times p(R) &\iff 0{,}1 = 0{,}05 + p(R) - 0{,}05p(R) \\
&\iff 0{,}1 - 0{,}05 = p(R)(1 - 0{,}05) \\
&\iff 0{,}05 = 0{,}95p(R) \\
&\iff p(R) = \frac{0{,}05}{0{,}95} = \frac{5}{95} \\
&\iff p(R) = \frac{\cancel{5}}{19 \times \cancel{5}} \\
&\iff \boxed{p(R) = \frac{1}{19}}
\end{aligned}$$

d) Vrai

« Les deux roues sont crevées » est l'événement $V \cap R$.

$$\begin{aligned}
p(V \cap R) &= p(V) \times p(R) \\
&= 0{,}05 \times \frac{1}{19} \\
&= \frac{0{,}05}{19} \times \frac{20}{20} \\
&= \boxed{\frac{1}{380}}
\end{aligned}$$

Exercice n° 10 : FVFF - *Probabilités continues*

a) Faux

Pour une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, la courbe représentative de la fonction de densité admet les propriétés suivantes :

- C_f admet un axe de symétrie pour $x = \mu$;
- plus σ est "grand", plus la courbe est "aplati".

On déduit alors que $\mu_1 < \mu_2$ mais que $\sigma_1 > \sigma_2$

b) Vrai

La fonction de densité d'une loi exponentielle est définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
On a donc $f_1(0) = \lambda_1 e^0 = \lambda_1$ et $f_2(0) = \lambda_2$. Or $f_1(0) < f_2(0)$ donc $\lambda_1 < \lambda_2$.

c) Faux

Si R suit une loi normale de paramètre μ et σ alors $Z = \dfrac{R-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.
Donc $Z = \dfrac{R-100}{8}$ suit une loi normale centrée réduite.

d) Faux

On remarque que $116 = 100 + 2 \times 8 = \mu + 2\sigma$. Or $p(\mu - 2\sigma < R < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$. D'où :

$$\begin{aligned} p(R < 116) &= p(R < \mu) + p(\mu < R < \mu + 2\sigma) \\ &= 0{,}5 + \frac{0{,}954}{2} \simeq 0{,}975 \end{aligned}$$

➽ Exercice n° 11 : FVVF - *Notions de base dans l'espace*

a) Faux

(P) et (Q) sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux le sont aussi autrement dit le produit scalaire de leurs vecteurs normaux est nul.

$$\left.\begin{array}{r} (P) : x - y = 0 \implies \vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (Q) : y + 2z - 3 = 0 \implies \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 0 \times 2 = -1 \neq 0$$

Donc (P) et (Q) ne sont pas orthogonaux.

b) Vrai

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite Δ intersection de (P) et (Q) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}_P$ et à $\vec{n}_Q$.
$\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + (-1) \times 2 + 0 \times (-1) = 2 - 2 = 0 \implies \vec{n}_P \perp \vec{u}$
$\vec{n}_Q \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0 \implies \vec{n}_Q \perp \vec{u}$
Donc $\vec{u}$ est bien un vecteur directeur de la droite Δ.

c) Vrai

Pour vérifier si la représentation paramétrique proposée est bien celle de Δ, on peut remplacer les expressions de x, y et z dans (P) puis dans (Q).
Dans (P) : $t - t = 0 \implies 0 = 0$ donc $\Delta \subset (P)$.
Dans (Q) : $t + \cancel{2} \times \dfrac{3 - t}{\cancel{2}} - 3 = 0 \implies 0 = 0$ donc $\Delta \subset (Q)$.
Comme Δ est incluse à la fois dans (P) et dans (Q), on en déduit que c'est bien la droite d'intersection de ces deux plans.

d) Faux

(R) a pour vecteur normal $\vec{n}_R \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est le vecteur $\vec{u}$. Ce qui signifie que Δ est perpendiculaire au plan (R).

➽ Exercice nº 12 : VFVV - *Utilisation des complexes en géométrie*

a) Vrai

Soit (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 12 = -12 < 0$ donc deux solutions complexes conjuguées.

$z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{6 - \mathrm{i}\sqrt{4 \times 3}}{2} = \dfrac{6 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

b) Faux

$4 - z_1 = 4 - (3 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Et $2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

c) Vrai

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = \theta \text{ avec } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \implies \theta = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

Donc $z_1 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Et $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right) = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

d) Vrai

Soit K le milieu de $[OA]$. Alors $z_K = \dfrac{z_O + z_A}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $OA = |z_A| = |4| = 2$.

Si $KM_1 = OA$ alors M_1 appartient au cercle de diamètre $[OA]$.

$$\begin{aligned} KM_1 &= |z_1 - z_K| \\ &= |3 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2| \\ &= |1 + \mathrm{i}\sqrt{3}| \\ &= \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc M_1 appartient au cercle de diamètre $[OA]$.

➠ Exercice n° 13 : FVFV - *Un peu de trigonométrie dans l'escargot*

a) Faux

Dans le triangle OA_nA_{n+1} rectangle en A_{n+1}, on a :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OA_{n+1}}{OA_n} \implies OA_{n+1} = OA_n \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{A_nA_{n+1}}{OA_n} \implies AA_{n+1} = OA_n \sin\alpha$$

b) Vrai

D'après l'égalité précédente, on a :

$$\left.\begin{aligned} \cancel{OA_1} &= OA_0 \cos\alpha \\ \cancel{OA_2} &= \cancel{OA_1} \cos\alpha \\ \vdots &= \vdots \\ OA_n &= \cancel{OA_{n-1}} \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{On réalise le produit membre à membre}$$

$$OA_n = OA_0 \times (\cos\alpha)^n \implies \boxed{OA_n = l \times (\cos\alpha)^n}$$

c) Faux

$$\left.\begin{aligned} A_0A_1 &= OA_0 \sin\alpha \\ A_1A_2 &= OA_1 \sin\alpha \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n-1}A_n &= OA_{n-1} \sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{On réalise la somme membre à membre}$$

$$A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = \sin\alpha\,(OA_0 + OA_1 + \ldots + OA_{n-1})$$

$$L_n = \sin\alpha\left(l(\cos\alpha)^0 + l(\cos\alpha)^1 + \ldots + l(\cos\alpha)^{n-1}\right)$$

$$L_n = l \times \sin\alpha\left((\cos\alpha)^0 + (\cos\alpha)^1 + \ldots + (\cos\alpha)^{n-1}\right)$$

$$\boxed{L_n = l \times \sin\alpha \times \frac{1-(\cos\alpha)^n}{1-\cos\alpha}}$$

On remarque que $(\cos\alpha)^0+(\cos\alpha)^1+\ldots+(\cos\alpha)^{n-1}$ est la somme des n termes d'une suite géométrique de raison $q = (\cos\alpha)$ et de premier terme $(\cos\alpha)^0 = 1$.

On applique alors la formule : $(1^{\text{er}}\text{ terme}) \times \dfrac{1-q^{\text{nbre termes}}}{1-q}$.

d) Vrai

On peut remarquer que $L_n = l \times \sin\alpha \times \dfrac{1-(\cos\alpha)^n}{1-\cos\alpha} = l\,(1-(\cos\alpha)^n) \times \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

Il vient alors en utilisant les formule données dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} &= \frac{\sin\left(2\times\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1-\cos\left(2\times\dfrac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{\cancel{2}\times\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cancel{2}\times\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{\cancel{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\times\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cancel{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\times\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{car } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}
\end{aligned}$$

On peut alors déduire que :

$$\begin{aligned}
Ln &= l\,(1-(\cos\alpha)^n)\times\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \\
&= l\,(1-(\cos\alpha)^n)\times\frac{1}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \boxed{l\times\frac{1-(\cos\alpha)^n}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

➽ Exercice n° 14 : FFVV - *Fonction dépendant d'un paramètre*

a) Faux

Le point d'intersection, s'il existe, entre la courbe C_k et l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;f_k(0))$ avec $f_k(0) = k\mathrm{e}^0 = k$.
Donc C_k coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;k)$.

Les points d'intersections, s'ils existent, entre la courbe C_k et l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f_k(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f_k(x) = 0 &\iff (x+k)\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\iff x = -k \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = 0 : \text{impossible} \end{aligned}$$

Donc C_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-k\,;0)$.

b) Faux

Pour déterminer le minimum de f_3 sur $\mathbb{R}$, nous pouvons dresser le tableau des variations de f_3 :

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= ((x+3)\mathrm{e}^{-x})' \\ &= (x+3)'\mathrm{e}^{-x} + (x+3)(\mathrm{e}^{-x})' \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+3) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1-x-3) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-x-2) \end{aligned}$$

$f_3'(x)$ est du signe de $-x-2$ car pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f_3(-2)$	$\searrow$	

Or $f_3(-2) = (-2+3)\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2$ qui est un maximum de f_3 sur $\mathbb{R}$.

c) Vrai

La fonction F_k est une primitive de f_k si $F_k' = f_k$.

$$\begin{aligned} F_k'(x) &= ((-x-1-k)\mathrm{e}^{-x})' \\ &= (-x-1-k)'\mathrm{e}^{-x} + (-x-1-k)(\mathrm{e}^{-x})' \\ &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1-k) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-1+x+1+k) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(x+k) \\ &= f_k(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction F_k est bien une primitive de f_k.

d) Vrai

L'aire notée $\mathcal{A}$ de la portion de plan délimitée par :

- la courbe C_3 et l'axe des abscisses ,
- les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$,

se définit par l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^1 f_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F_3(1) - F_3(0) \\
&= \left((-1-1-3)\mathrm{e}^{-1}\right) - \left((0-1-3)\mathrm{e}^{0}\right) \\
&= -5\mathrm{e}^{-1} - (-4) \times 1 \\
&= \boxed{4 - 5\mathrm{e}^{-1}}
\end{aligned}$$

Exercice n° 15 : VFFV - *Notions d'espace dans un cube*

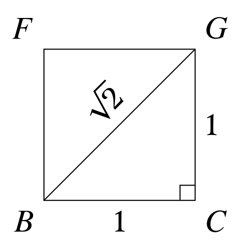
a) Vrai

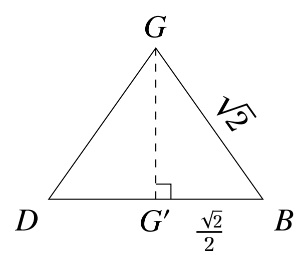
Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre BCDG est défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{\text{Aire de BCD} \times \text{hauteur}}{3} \\ &= \frac{\frac{DC\times CB}{2} \times CG}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1\times 1}{2} \times 1 \\ &= \boxed{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

b) Faux

Le triangle BDG est isocèle en G. La hauteur issue de G coupe le côté DB en son milieu noté G'. Le théorème de Pythagore dans les triangles BCG et CDB permet de déterminer la mesure des diagonales d'un carré de côté 1. Le théorème de Pythagore dans le triangle GG'B permet de déterminer la mesure de GG' :





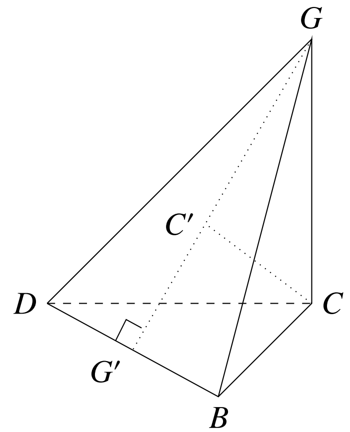
$$GG' = \sqrt{GB^2 - G'B^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Il vient alors l'aire $\mathcal{A}$ de BDG :

$$\mathcal{A} = \frac{G'B \times G'G}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{8}}$$

c) Faux

Une autre façon de calculer l'aire du tétraèdre BCDG est : $\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire de BDG} \times \text{CC'}}{3}$ où C' est le projeté orthogonal de C sur le plan (BDG). La distance CC' représente alors la distance du point C au plan (BDG).



On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A} \times CC'}{3} \iff & CC' = \frac{3\mathcal{V}}{\mathcal{A}} \\
\iff & CC' = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{8}} \\
\iff & CC' = \frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{6}} \\
\iff & CC' = \frac{4}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
\iff & CC' = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}
\end{aligned}$$

d) Vrai

Vérifions si les points $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ et $G(1;1;1)$ appartiennent au plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$:

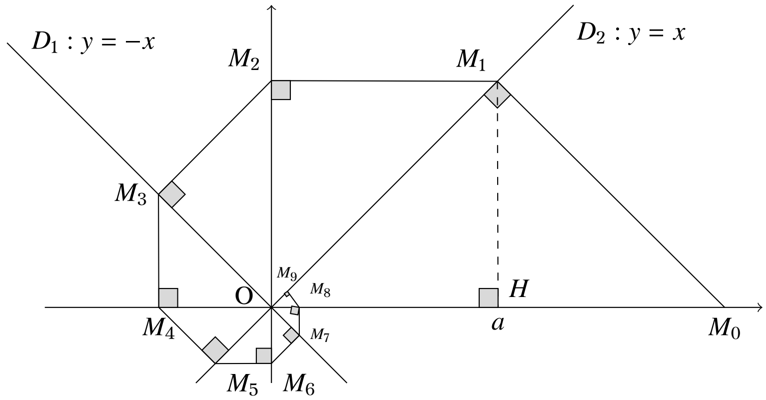
$x_B + y_B - z_B - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ donc $B \in (\mathcal{P})$.

$x_D + y_D - z_D - 1 = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$ donc $D \in (\mathcal{P})$.

$x_G + y_G - z_G - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $G \in (\mathcal{P})$.

Donc l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ est bien celle du plan (BDG).

➽ Exercice n° 16 : VFVF - *Étude d'une spirale*



a) Vrai

$OM_0 = 2$ et H milieu de $[OM_0]$ donc $a = 1$ et $M_1M_2 = 1$.

b) Faux

OM_2M_3 est un triangle isocèle rectangle en M_3 donc d'après le théorème de Pythagore :

$$OM_2^2 = OM_3^2 + M_2M_3^2 \iff OM_2^2 = 2M_2M_3^2$$
$$\iff M_2M_3 = \sqrt{\frac{OM_2^2}{2}}$$

Or $OM_2 = 1$ donc $M_2M_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

c) Vrai

Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle OM_nM_{n+1} isocèle rectangle en M_{n+1} :

$$OM_n^2 = OM_{n+1}^2 + M_nM_{n+1}^2 \iff OM_n^2 = 2OM_{n+1}^2$$
$$\iff OM_{n+1} = \sqrt{\frac{OM_n^2}{2}}$$
$$\iff \ell_{n+1} = \ell_n \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\iff \boxed{\ell_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \ell_n}$$

d) Faux

La suite (ℓ_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\ell_0 = \sqrt{2}$ donc la somme de ces $n+1$ premiers termes est égale à :

$$\begin{aligned}
S_n &= \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n \\
&= \ell_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{\cancel{2}\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}} \\
&= \boxed{2\sqrt{2}+2}
\end{aligned}$$