mathete.net

Concours Puissance 11 - LaSalle 2016

Corrigé détaillé de l'épreuve de mathématiques

Réponses aux exercices

➽ Exercice n° 1 : FVFF - *Lecture-interprétation énoncé*

a) Faux

Par définition, $f'(a)$ est égale au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a.
$f'(2) = 0$ car la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est horizontale donc son coefficient directeur est nul.

b) Vrai

$f'(3) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{2-3} = \dfrac{-2}{-1} = 2 = f(3)$.

c) Faux

L'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A d'abscisse 3 est :

$$\begin{aligned} y = f'(3)(x-3) + f(3) &\iff y = 2(x-3)+2 \\ &\iff y = 2x - 4 \end{aligned}$$

d) Faux

$g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ donc $g'(3) = -\dfrac{f'(3)}{[f(3)]^2} = -\dfrac{2}{2^2} = -\dfrac{1}{2}$

➠ Exercice n° 2 : VFVV - *Logique*

a) Vrai

Si $\sqrt{x} = 2$ alors $x = 4$ et $|x| = |4| = 4$.

b) Faux

La réciproque s'écrit :

$$|x| = 4 \implies \sqrt{x} = 2$$

Prenons le contre-exemple suivant : si $x = -4$ alors $|x| = |-4| = 4$ et pourtant $\sqrt{x}$ n'existe pas.

c) Vrai

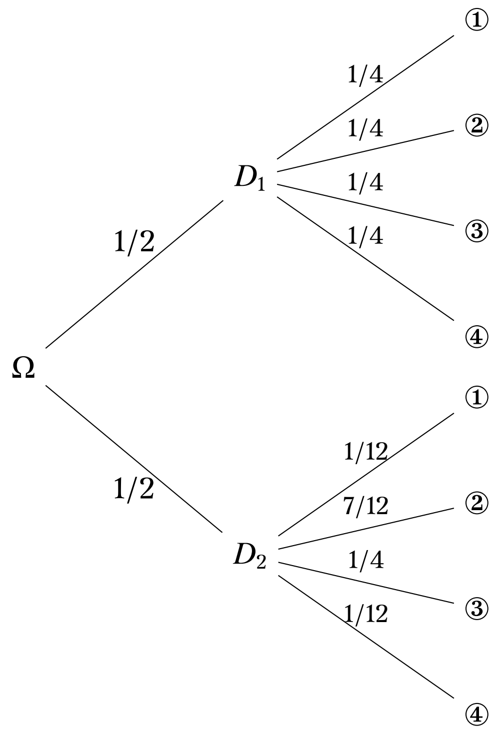
x	-3	-7
$f'(x)$	$+$	
f	1	$\nearrow$

Pour tout réel x de $[-3\,;7]$, $f(x) > 0$.

d) Vrai

Elle est majorée par sa limite et minorée par son premier terme. Donc elle est bornée.

Exercice n° 3 : VFFV - *Probabilités conditionnelles*



a) Vrai

Lorsqu'on lance le dé truquée, la probabilité d'obtenir la face numérotée 2 s'obtient par complémentarité :

$$p_{D_2}(②) = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = 1 - \frac{5}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

b) Faux

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(①) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

c) Faux

Par définition, deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} p(\text{pair}) &= p(②) + p(④) \\ &= \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\right) \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a :

$$p(D_1) = \frac{1}{2}$$

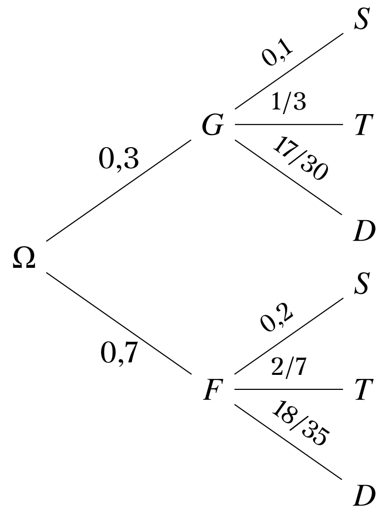
$$\left.\begin{array}{l} \text{Or } p(D_1 \cap \text{pair}) = p(D_1 \cap 2) + p(D_1 \cap 4) = \dfrac{1}{4} \\ \text{Et } p(D_1) \times p(\text{pair}) = \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{24} \end{array}\right\} \frac{1}{4} \neq \frac{7}{24} \text{ donc non indépendants}$$

d) Vrai

$$p_{①}(D_1) = \frac{p(① \cap D_1)}{p(①)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = 6 \times \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Exercice n° 4 : FFVF - *Lien entre tableau et arbre de probabilités*

	Garçons (G)	Filles (F)	Total
Sport (S)	$10\% \times 60 = 6$	**28**	34
Théâtre (T)	**20**	40	60
Dessin (D)	**34**	**72**	106
Total (D)	$30\% \times 200 = 60$	$x = 140$	**200**



a) Faux

$p(G \cap S) = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03.$

b) Faux

$x = 200 - 60 = 140.$

c) Vrai

$$p(T) = \frac{60}{200} = 0{,}3.$$

d) Faux

$$p_T(F) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}.$$

➽ Exercice n° 5 : VVFF - *Calcul du nombre d'abonnés d'une société*

a) Vrai

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 - 40\% \times a_0 + 400 \\ &= 1500 - \frac{40}{\cancel{100}} \times 15 \times \cancel{100} + 400 \\ &= 1500 - 600 + 400 \\ &= 1\,300 \end{aligned}$$

b) Vrai

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - 40\% \times a_n + 400 \\ &= a_n - 0{,}4a_n + 400 \\ &= 0{,}6a_n + 400 \end{aligned}$$

c) Faux

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,000 \\ &= 0{,}6a_n + 400 - 1\,000 \\ &= 0{,}6a_n - 600 \\ &= 0{,}6\left(a_n - \frac{600}{0{,}6}\right) \\ &= 0{,}6(a_n - 1\,000) \\ &= 0{,}6v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_0 = a_0 - 1\,000 = 500$.

d) Faux

$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0{,}6^n$.
Or $v_n = a_n - 1\,000$ donc $a_n = v_n + 1\,000 = 500 \times 0{,}6^n + 1\,000$.

➽ Exercice n° 6 : FFFV - *Calcul de limites*

a) Faux

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 4x + 7 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty.$

b) Faux

$-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) - 3 \leqslant 0 \implies -\dfrac{1}{x} + 3 \leqslant f(x) \leqslant 3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ d'après le théorème des gendarmes.

c) Faux

$Q(n) = \dfrac{2^n + 3}{3^n + 2} = \dfrac{2^n\left(1 + \frac{3}{2^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{2}{3^n}\right)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \dfrac{1 + \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}}.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} Q(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \dfrac{1 + \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times 1 = 0$ car $0 < \dfrac{2}{3} < 1.$

d) Vrai

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n + (-1)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n} \times 1}{\cancel{n}\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} = \dfrac{1}{2}$ car $(-1)^n = \pm 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pm 1}{n} = 0.$

Exercice n° 7 : FFFV - *Notions de base sur les complexes*

a) Faux

$(2i)^4 = 2^4 \times i^4 = 16 \times i^2 \times i^2 = 16 \times (-1) \times (-1) = 16.$

b) Faux

La forme trigonométrique d'un nombre complexe est : $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $|z|$ un nombre positif. Donc $-3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ n'est pas une forme trigonométrique car -3 ne peut être considéré comme le module de z puisque c'est un nombre négatif. La forme trigonométrique de $\frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ est :

$$\begin{aligned}\frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i &= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\\ &= \boxed{3\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)}\end{aligned}$$

c) Faux

$z_1 = z_2 \implies |z_1| = |z_2|$ mais la réciproque est fausse.
En effet, $|-i| = |i| = 1$ et pourtant $-i \neq i$.

d) Vrai

$$\frac{(1+i)^2}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{10\pi}{12}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } \frac{5\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}\ [2\pi].$$

➽ Exercice n° 8 : VFVF - *Calculs d'intégrales*

a) Vrai

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Faux

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \boxed{2\sqrt{2}-2} \rightarrow \text{ on reconnaît la forme : } \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

c) Vrai

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \\
&= -\left[\ln(\cos x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= -\ln 2 + \ln\sqrt{3} - \ln 2 \\
&= \ln\sqrt{3} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln 3}
\end{aligned}$$

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ à un coefficient -1 près.

d) Faux

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{x^2-1}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_2^4 \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}\mathrm{d}x \\
&= \int_2^4 (x-1)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_2^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\times 4^2 - 4\right) - \left(\frac{1}{2}\times 2^2 - 2\right) \\
&= 8-4-2+2 \\
&= \boxed{4}
\end{aligned}$$

Exercice n° 9 : VVVF - *Étude de fonctions*

a) Vrai

$$f'(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} = -\frac{-2x}{\left(1-x^2\right)^2} = \boxed{\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}}$$

b) Vrai

Par définition, le nombre dérivé en $a = 0{,}5$ noté $f'(0{,}5)$ est égale au coefficient directeur de la tangente en $a = 0{,}5$.

Or $f'(0{,}5) = \dfrac{2 \times 0{,}5}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{9}{16}} = \dfrac{16}{9}$ et $16x - 9y - 7 = 0 \implies y = \dfrac{16}{9}x - \dfrac{7}{9}$.

Donc la tangente et la droite sont parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur.

c) Vrai

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{\frac{-1(1+x)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} \times \frac{1+x}{1-x} \\
&= -\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{-\cancel{2}}{\cancel{(1+x)}(1+x)} \times \frac{\cancel{1+x}}{1-x} \\
&= \boxed{\frac{1}{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f.

d) Faux

L'aire du domaine hachurée est définie par l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x &= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln 3\right) \\
&= -\frac{1}{2}(-\ln 3 - \ln 3) \\
&= \frac{2\ln 3}{2} \\
&= \boxed{\ln 3}
\end{aligned}$$

Exercice n° 10 : VFVF - *Problème autour de la fonction exponentielle*

a) Vrai

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} + 5$ et $f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x} = 2e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$.

b) Faux

$$\begin{aligned} 2e^{x} - 1 > 0 &\iff e^{x} > \frac{1}{2} \\ &\iff x > \ln\frac{1}{2} \\ &\iff x > -\ln 2 \end{aligned}$$

c) Vrai

Pour déterminer les variations de f', il faut étudier le signe de $f''(x)$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$2e^{x}$	$+$
$2e^{x} - 1$	$+$
$f''(x)$	$+$
f'	$f'(0)$ $\nearrow$

Donc f' est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme son minimum $f'(0) = 5$ est positif, on déduit que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

d) Faux

Pour déterminer les variations de f, il faut étudier le signe de $f'(x)$ dont on a montré précédemment qu'il était toujours positif :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$f(0)$ $\nearrow$

Donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice n° 11 : VVVF - *Problème autour de la fonction ln*

a) Vrai

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+1)'}{2x+1} - 3 \times \frac{(x-5)'}{x-5} \\
&= \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{x-5} \\
&= \frac{2(x-5) - 3(2x+1)}{(2x+1)(x-5)} \\
&= \frac{2x - 10 - 6x - 3}{(2x+1)\underbrace{(5-x)\times(-1)}_{\text{factorisation par (-1)}}} \\
&= -\frac{-4x-13}{(2x+1)(5-x)} \\
&= \boxed{\frac{4x+13}{(2x+1)(5-x)}}
\end{aligned}$$

b) Vrai

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 5^+} \ln(2x+1) = \ln 11 \\
&\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5) = -\infty
\end{aligned}\right\}\text{donc par produit puis par somme, } \lim_{x\to 5^+} \ln(2x+1) - 3\ln(x-5) + 5 = +\infty$$

Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

c) Vrai

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2x+1) - 3\ln(x-5) + 5 \\
&= \ln(2x+1) - \ln(x-5)^3 + 5 \\
&= \ln\left(\frac{2x+1}{(x-5)^3}\right) + \ln e^5 \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{e^5(2x+1)}{(x-5)^3}\right)}
\end{aligned}$$

d) Faux

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{e^5(2x+1)}{(x-5)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^5 x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^5}{x^2} = 0^+ \\
&\lim_{X\to 0^+} \ln X = -\infty
\end{aligned}\right\}\text{donc par composition, } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

Donc C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Exercice n° 12 : VFFV - *Utilisation des algorithmes dans une suite*

a) Vrai

$u_0 = 1 \qquad u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4 \qquad u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 5 = 9.$
L'algorithme n° 1 affiche donc la valeur de u_N connaissant N.

b) Faux

$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16 \qquad u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 3 = 16 + 6 + 3 = 25.$

c) Faux

Calculons la valeur de u_1 avec cet algorithme. On utilise un tableau pour "tracer" l'exécution de l'algorithme lorsque $N = 2$ par exemple :

Variables	`N`	`U`	`I`	`I < N`
Initialisation	2	1	0	Vrai
Traitement	2	$1 + 2 \times 0 + 1 = 2$	1	Vrai
	2	$2 + 2 \times 1 + 1 = 5$	2	Faux

L'algorithme affiche `U=5` lorsque $N = 2$, or $u_2 = 9$ donc l'algorithme n° 2 n'affiche pas la valeur de u_N connaissant la valeur N.

d) Vrai

On peut démontrer par récurrence $\mathcal{P}_n$: « Pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$ ».

• *Initialisation :* pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité :* Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier n fixé c'est-à-dire que $u_n = (n+1)^2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire que $u_{n+1} = (n+1+1)^2 = (n+2)^2$.

• *Démonstration :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= (n^2 + 2n + 1) + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• *Conclusion :* la propriété étant vraie au rang 0 et étant héréditaire alors on peut déduire d'après le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Exercice n° 13 : FVFF - *Probabilités continues*

a) Faux

$p(X \geqslant t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t} + \mathrm{e}^0\right) = 1 - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda t} = \boxed{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

b) Vrai

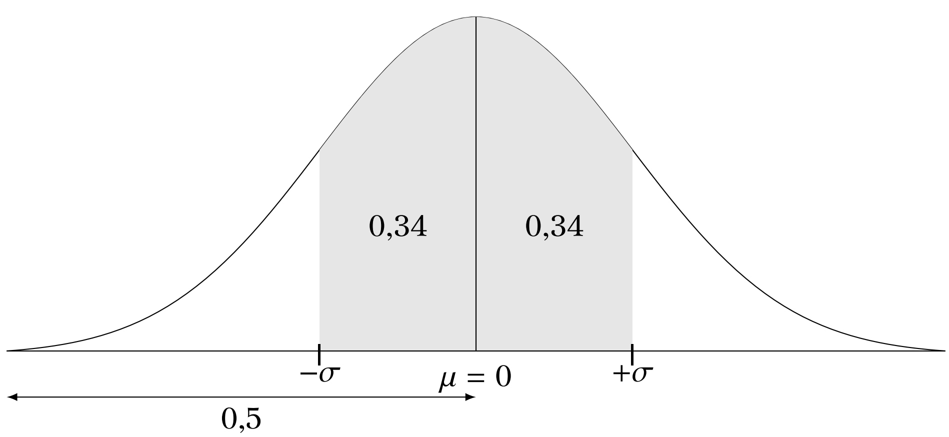
$$\begin{aligned}
p(X \leqslant 1) = 0{,}2 &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 1} = \frac{1}{5} \\
&\iff \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{5} \\
&\iff \ln \mathrm{e}^{-\lambda} = \ln \frac{4}{5} \\
&\iff -\lambda = \ln \frac{4}{5} \\
&\iff \lambda = -(\ln 4 - \ln 5) \\
&\iff \lambda = \ln 5 - \ln 4 \\
&\iff \boxed{\lambda = \ln \frac{5}{4}}
\end{aligned}$$

c) Faux

Si Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type σ alors $p(-\sigma \leqslant Y \leqslant \sigma) = 0{,}68$ donc $p(0 \leqslant Y \leqslant \sigma) = 0{,}34 < 0{,}4$.

d) Faux

$\pi(-\sigma) = p(Y \leqslant -\sigma) = p(Y \leqslant \mu) - p(-\sigma \leqslant Y \leqslant 0) = 0{,}5 - 0{,}34 = 0{,}16 > \dfrac{1}{10}$.



Exercice n° 14 : VVFV - *Géométrie analytique*

a) Vrai

(Q) d'équation cartésienne $-y+2z=4$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_Q}(0\,;-1\,;2)$. Celui-ci est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v_x}(1\,;0\,;0)$ car :

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{v_x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0\times1+(-1)\times0+2\times0=0$$

Donc le plan (Q) est orthogonal à l'axe des abscisses.

b) Vrai

$\overrightarrow{n_P}(1\,;1\,;3)$ et $\overrightarrow{n_Q}(0\,;-1\,;2)$ non colinéaires car $\dfrac{0}{1}\neq\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{2}{3}$ donc (P) et (Q) sont sécants.

c) Faux

$x+5z=5$ est une équation cartésienne de plan car elle est de la forme $ax+by+cz+d=0$ et non de droite.

d) Vrai

Cherchons la représentation paramétrique de Δ droite d'intersection de (P) et (Q) :

$$\begin{cases}x+y+3z=1\\-y+2z=4\\z=t\end{cases}\iff\begin{cases}x=-2t+4-3t+1\\y=2t-4\\z=t\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x=-5t+5\\y=2t-4\\z=t\end{cases}$$

Un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{v_\Delta}(-5\,;2\,;1)$. Or $\overrightarrow{v_D}(-5\,;2\,;1)$ donc $\overrightarrow{v_\Delta}$ et $\overrightarrow{v_D}$ sont colinéaires donc $(\Delta)\,/\!/\,(D)$.

➽ Exercice nº 15 : VFVF - *Utilisation des complexes en géométrie*

a) Vrai

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} &= \frac{\mathrm{i} - (2 - 3\mathrm{i})}{(6 - i) - (2 - 3\mathrm{i})}\\ &= \frac{-2 + 4\mathrm{i}}{4 + 2\mathrm{i}} \times \frac{4 - 2\mathrm{i}}{4 - 2\mathrm{i}}\\ &= \frac{-8 + 4\mathrm{i} + 16\mathrm{i} + 8}{4^2 + 2^2}\\ &= \frac{20\mathrm{i}}{20} = \mathrm{i}\end{aligned}$$

b) Faux

$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \mathrm{i} \implies \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(\mathrm{i}) \iff \left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc ABC est rectangle en A.

c) Vrai

$$\begin{aligned}z' &= \frac{\mathrm{i}(z - 2 + 3\mathrm{i})}{z - \mathrm{i}}\\ &= \frac{\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y - 2 + 3\mathrm{i})}{x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}}\\ &= \frac{\mathrm{i}x - y - 2\mathrm{i} - 3}{x + \mathrm{i}(y - 1)} \times \frac{x - \mathrm{i}(y - 1)}{x - \mathrm{i}(y - 1)}\\ &= \frac{(\mathrm{i}x - y - 2\mathrm{i} - 3)(x - \mathrm{i}y + \mathrm{i})}{x^2 + (y - 1)^2}\\ &= \frac{\mathrm{i}x^2 + \cancel{xy} - x - \cancel{xy} + \mathrm{i}y^2 - \mathrm{i}y - 2\mathrm{i}x - 2y + 2 - 3x + 3\mathrm{i}y - 3\mathrm{i}}{x^2 + (y - 1)^2}\\ &= \underbrace{\frac{-4x - 2y + 2}{x^2 + (y - 1)^2}}_{\mathcal{R}e(z)} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3}{x^2 + (y - 1)^2}}_{\mathcal{I}m(z)}\end{aligned}$$

Donc la partie imaginaire de z' est $\dfrac{x^2 - 2x + y^2 + 2y - 3}{x^2 + (y - 1)^2}$.

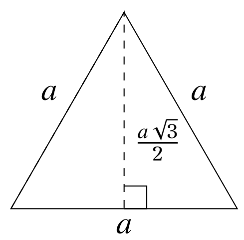
d) Faux

$$
\begin{aligned}
z' \text{ est un réel } &\iff \mathcal{I}m(z) = 0 \\
&\iff \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\
&\iff \underbrace{x^2 - 2x}_{(x-1)^2-1} + \underbrace{y^2 + 2y}_{(y+1)^2-1} - 3 = 0 \\
&\iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2
\end{aligned}
$$

L'équation cartésienne d'un cercle étant $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, on peut déduire que pour que z' soit réel, il faut que M appartienne au cercle de centre $(1\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

➽ Exercice n° 16 : VVVV - *Utilisation des algorithmes en géométrie*

a) Vrai



La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ *(Pythagore)*, or à l'étape 1, la longueur du côté du triangle est $l_1 = \frac{1}{3}$ donc :

$$h_1 = l_1\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\times 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

b) Vrai

On peut constater qu'à l'étape $n+1$ la longueur d'un côté du triangle s'obtient en divisant par 3 la longueur précédente donc $l_{n+1} = \frac{1}{3}l_n$ et $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *(formule des suites géométriques)*.

c) Vrai

$$h_n = l_n\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\times 3^n}$$

d) Vrai

On peut remarquer que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 2\times 3$, $u_3 = 2^2\times 3$ donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, le nombre de triangles construits à l'étape n est :

$$u_n = 2^{n-1}\times 3$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2} l_n \times h_n \times u_n \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n} \times 2^{n-1} \times 3 \\
&= \frac{2^{n-1}}{2 \times 2} \times \frac{3 \times \sqrt{3}}{3^n \times 3^n} \\
&= \frac{2^n \times 2^{-1}}{2^2} \times \frac{3 \times \sqrt{3}}{(3 \times 3)^n} \\
&= \frac{2^n}{2^{2+1}} \times \frac{3 \times \sqrt{3}}{9^n} \\
&= \frac{3 \times \sqrt{3}}{2^3} \times \frac{2^n}{9^n} \\
&= \frac{3 \times \sqrt{3}}{8} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n \\
&= \boxed{\frac{3 \times \sqrt{3} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n}{8}}
\end{aligned}$$