Concours ACCÈS 2016

Corrigé détaillé de l'épreuve de **Raisonnement Logique & Mathématiques**

Réponses aux questions

Partie 1 - Raisonnement logique

➽ Question 1 : FFVV

Tâchons de mettre en équation la problématique au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé :

- Somme versée par les x collègues : $20x$ € ;
- Soit M le montant total de l'addition alors les x collègues en ont eu pour $0{,}8M$ € en tenant compte de la réduction de 20% ;
- Il manque y € pour payer la facture donc : $20x + y = 0{,}8M$;
- Chacun ajoute 3 € donc ils disposent maintenant d'une somme totale de $23x$ € ;
- Le serveur rend alors z € donc : $23x - z = 0{,}8M$.

✏ Affirmation A : Faux

L'analyse précédente permet de déduire que :

$$\boxed{23x - z = 20x + y}$$

✏ Affirmation B : Faux

x étant le nombre de collégues, cherchons à isoler x dans la relation précédente :

$$\begin{aligned} 23x - z = 20x + y &\iff 3x = y + z \\ &\iff \boxed{x = \frac{y+z}{3}} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

Le prix par personne est de : $\dfrac{23x - z}{x} = \dfrac{23x}{x} - \dfrac{z}{x} = \boxed{23 - \dfrac{z}{x}}$.

✏ Affirmation D : Vrai

Cherchons le montant total M de l'addition sans la réduction :

$$\begin{aligned} 20x + y = 0{,}8M &\iff M = \frac{20x + y}{0{,}8} \\ &\iff M = \frac{20x + y}{\frac{4}{5}} \\ &\iff M = \frac{5}{4}(20x + y) \end{aligned}$$

Le prix p par personne sans la réduction est alors :

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\frac{5}{4}(20x+y)}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{5\times\cancel{4}\times 5x}{\cancel{4}} + \frac{y}{\frac{4}{5}}\right) \\
&= \frac{25\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{y}{\frac{4}{5}x} \\
&= \boxed{25 + \frac{y}{0{,}8x}}
\end{aligned}$$

➠ Question 2 : FFVV

Question étonnamment facile qui peut laisser penser à un piège mais il n'en est rien, une simple lecture attentive de l'énoncé permet de remplir le tableau suivant et on peut alors répondre à chaque affirmation.

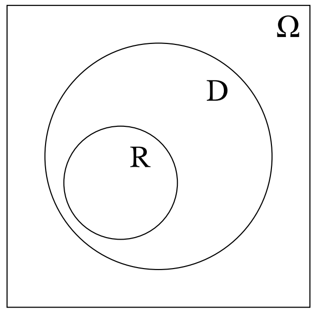
	Transport	Distance
Xavier	Bus ou ~~vélo~~	6 km
Yves	~~Bus~~ ou à pied	4 km
Noémie	Vélo	2 km

➽ Question 3 : VFFV

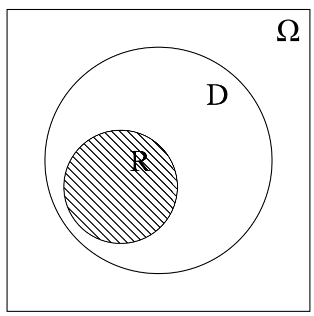
On définit les ensembles suivantes :

- Ω : « L'ensemble de la population » ;
- R : « Ceux qui réussissent » ;
- D : « Ceux qui travaillent dur ».

L'hypothèse de l'énoncé :« Pour réussir, il faut travailler dur » peut alors se traduire par $R \implies D$. Ce qui signifie que « travailler dur » est une **condition nécessaire** « pour réussir ». Dit autrement, que « ceux qui réussissent » ont nécessairement, forcément, obligatoirement « travailler dur ». Ce qui peut encore se traduire par le diagramme suivante :

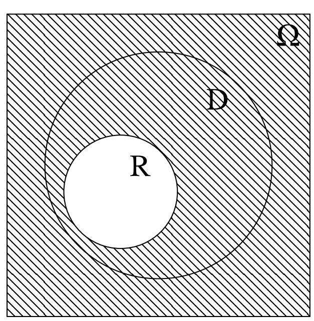


✏ Affirmation A : Vrai



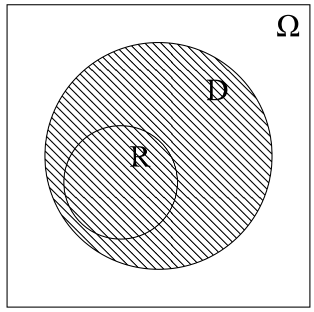
« Tous ceux qui réussissent travaillent dur ». En effet, la population de R est incluse dans la population de D.

✏ Affirmation B : Faux



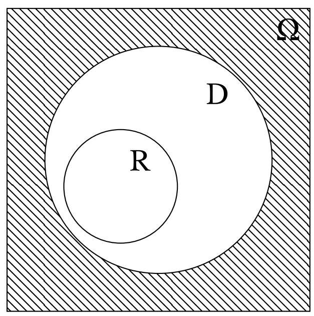
« Ceux qui ne réussissent pas ne travaillent pas dur » est une affirmation fausse car on peut trouver des individus qui ne réussissent pas c'est-à-dire qui ne sont pas dans R et qui pourtant travaillent dur.

✏ **Affirmation C : Faux**



« Les gens qui travaillent dur réussissent toujours » est une affirmation fausse car on peut trouver des individus qui travaillent dur c'est-dire qui sont dans D et qui pourtant ne réussissent pas c'est-à-dire qu'ils ne sont pas dans R.

✏ **Affirmation D : Vrai**



« Ceux qui ne travaillent pas dur ne peuvent pas réussir ». En effet, la population de ceux qui ne travaillent pas dur ne peut pas être dans R.

➽ Question 4 : FVVF

Soit :
- E : « avoir des enfants » ;
- F_n : « avoir exactement n enfants » ;
- F_5 : « avoir au moins 5 enfants ».

On a alors :

$$p(F_0) = 0{,}2 \qquad p(F_1) = 0{,}25 \qquad p(F_2) = 0{,}25 \qquad p(F_3) = 0{,}15 \qquad p(F_4) = 0{,}10 \qquad p(F_5) = 0{,}05$$

$$p(E) = 1 - p(F_0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

✏ Affirmation A : Faux

On cherche la probabilité conditionnelle p « qu'une femme ait 1 ou 2 enfants sachant que celle-ci a des enfants », d'où :

$$p = \frac{p(E \cap F_1) + p(E \cap F_2)}{p(E)} = \frac{0{,}25 + 0{,}25}{0{,}8} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8} = \boxed{0{,}625} \quad \text{soit } 65\%$$

✏ Affirmation B : Vrai

Le nombre moyen N de naissances pour ces 1000 femmes est au minimum égale à :

$$\begin{aligned} N &= 1000(0{,}25 \times 1 + 0{,}25 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + 0{,}10 \times 4 + 0{,}05 \times 5) \\ &= 250 + 500 + 450 + 400 + 250 \\ &= \boxed{1\,850} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

La probabilité p qu'une femme ait au moins 3 enfants est :

$$\begin{aligned} p &= p(F_3) + p(F_4) + p(F_5) \\ &= 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 \\ &= \boxed{0{,}30} \quad \text{soit } 30\% \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

C'est une question difficile. Attention au piège de sommer les pourcentages des femmes ayant plus de deux enfants : on parle des enfants de ces femmes et non des femmes elles-mêmes. Il faut donc chercher la proportion d'enfants ayant au minimum un frère ou une soeur. Ces 1000 femmes ont donné naissance au minimum à 1850 enfants. Or le nombre d'enfants minimum ayant un frère ou une soeur est :

$$\begin{aligned} M &= 1\,000 \times (0{,}25 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + 0{,}10 \times 4 + 0{,}05 \times 5) \\ &= 500 + 450 + 400 + 250 \\ &= 1\,600 \end{aligned}$$

Donc au moins $\dfrac{1\,600}{1\,850} \times 100 \simeq 85\%$ des enfants ont au moins un frère ou une soeur.

➽ Question 5 : VVFF

On définit les événements suivants :

- A : « Arthur est coupable » et $\overline{A}$: « Arthur est innocent » ;
- B : « Basile est coupable » et $\overline{B}$: « Basile est innocent » ;
- C : « Charly est coupable » et $\overline{C}$: « Charly est innocent » ;
- D : « Démosthène est coupable » et $\overline{D}$: « Démosthène est innocent » ;

Chaque information de l'énoncé peut alors se traduire par une proposition logique. Il est capital d'indiquer également la contraposée :

1) « Si Arthur est innocent alors Démosthène est coupable » se traduit par :

$$(\overline{A} \implies D) \iff (\overline{D} \implies A)$$

La contraposée signifie alors que : « Si Démosthène est innocent alors Arthur est coupable ».

2) Si Arthur est coupable alors Charly l'est aussi se traduit par :

$$(A \implies C) \iff (\overline{C} \implies \overline{A})$$

La contraposée signifie alors que : « Si Charly est innocent alors Arthur est innocent ».

3) Si Démosthène est coupable alors Basile l'est aussi se traduit par :

$$(D \implies B) \iff (\overline{B} \implies \overline{D})$$

La contraposée signifie alors que : « Si Basile est innocent alors Démosthène est innocent ».

4) Basile est innocent.

En partant de l'information que Basile est innocent, on peut déduire le schéma de culpabilité suivant :

$$\underbrace{\overline{B}}_{④}\underbrace{\implies}_{③}\overline{D}\underbrace{\implies}_{①}A\underbrace{\implies}_{②}C$$

On peut alors donner les coupables et les innocents et réponde à chaque affirmation :

- Arthur est coupable ;
- Basile est innocent ;
- Charly est coupable ;
- Démosthène est innocent.

➽ Question 6 : VVFF

On pose n un entier naturel non nul.

		BEC		
		Blanc	Noir	Total
PLUMES	Blanches	$19n$	$60 - 19n$	$0{,}3 \times 200 = 60$
	Jaunes	$90 - 19n$	$110 - (60 - 19n) = 50 + 19n$	$200 - 60 = 140$
	Total	$0{,}45 \times 200 = 90$	$200 - 90 = 110$	200

Certaines contraintes permettent de resteindre la valeur de n à quelques valeurs :

- $19n > 0 \implies n > 0$
- $90 - 19n \geqslant 0 \implies n \leqslant \dfrac{90}{19} \simeq 4{,}7$
- $60 - 19n \geqslant 0 \implies n \leqslant \dfrac{60}{19} \simeq 3{,}2$

Donc $n \in [1\,;3]$.

✏ Affirmation A : Vrai

Voir tableau.

✏ Affirmation B : Vrai

Voir tableau.

✏ Affirmation C : Faux

Il n'est pas forcément égal à 38. Il peut être égal à :

- 19 si $n = 1$;
- 38 si $n = 2$;
- 57 si $n = 3$.

✏ Affirmation D : Faux

Il peut être ègal à :

- $50 + 19n = 69$ si $n = 1$;
- $50 + 19n = 88$ si $n = 2$;
- $50 + 19n = 107$ si $n = 3$.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

➽ Question 7 : VVVV

✏ Affirmation A : Vrai

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$ existe si et seulement si $\dfrac{x-1}{x+3} > 0$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{D_f =]-\infty\,;-3[\,\cup\,]1\,;+\infty[}$.

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &\iff \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \ln \mathrm{e} \\
&\iff \frac{x-1}{x+3} = \mathrm{e} \\
&\iff x-1 = \mathrm{e}(x+3) \\
&\iff x-1 = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e} \\
&\iff x - \mathrm{e}x = 3\mathrm{e} + 1 \\
&\iff x(1-\mathrm{e}) = 3\mathrm{e}+1 \\
&\iff x = \frac{3\mathrm{e}+1}{1-\mathrm{e}} < 0
\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned}
\forall x \in D_f, f'(x) &= \frac{\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)'}{\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)} \\
&= \frac{x+3}{x-1} \times \frac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} \\
&= \frac{\cancel{x+3}}{x-1} \times \frac{x+3-x+1}{(x+3)\times\cancel{(x+3)}} \\
&= \frac{4}{(x-1)(x+3)}
\end{aligned}$$

Pour tout x de D_f, $(x-1)(x+3) > 0$ (voir tableau de signe) donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur D_f et en particulier sur $]-1\,;+\infty[$.

✏ **Affirmation D : Vrai**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{X\to 1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \text{donc par composition, } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Et par conséquent, C_f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

➠ Question 8 : VFVF

✏ Affirmation A : Vrai

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]0\,;+\infty[,\, f'(x) &= 2\times(\ln x)'\ln x + (\ln x)' \qquad \text{car } (u^n)' = nu'u^{n-1}\\ &= 2\times\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\\ &= \frac{2\ln x+1}{x}\end{aligned}$$

Etude du signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}2\ln x+1\geqslant 0 &\iff \ln x \geqslant \frac{1}{2}\\ &\iff x\geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\end{aligned}$$

Variation de f :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$2\ln x+1$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$	$f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$	$\nearrow$	

Or $f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = (\ln \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})^2 + \ln \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

✏ Affirmation B : Faux

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff (\ln x)^2+\ln x = 0\\ &\iff X^2+X=0 \qquad \text{en posant } X=\ln x,\text{ avec } X>0\\ &\iff X(X+1)=0\\ &\iff X=0 : \text{impossible} \quad \text{ou } X=-1\\ &\iff \ln x=-1\\ &\iff x=\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Donc $x_B = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$.

✏ **Affirmation C : Vrai**

La tangente à C_f au point B d'abscisse $x_B = \mathrm{e}^{-1}$ a pour coefficient directeur :

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= \frac{2\ln \mathrm{e}^{-1}+1}{x} \\ &= \frac{2\times(-1)+1}{\mathrm{e}^{-1}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} \\ &= -\mathrm{e} \end{aligned}$$

Elle est donc bien parallèle à la droite d'équation $y = -\mathrm{e}x + \mathrm{e}$ puisqu'elles ont le même coefficient directeur.

✏ **Affirmation D : Faux**

$$\begin{aligned} \forall x \in \,]0\,;+\infty[, F'(x) &= (x)'(\ln x)^2 + x((\ln x)^2)' - ((x)'\ln x + x(\ln x)') - (x)' \\ &= (\ln x)^2 + \cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}}\ln x - \ln x - \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} - 1 \\ &= (\ln x)^2 - \ln x - 2 \\ &= \ln^2 x - \ln x - 2 \neq f(x) \end{aligned}$$

Donc F n'est pas une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

➠ Question 9 : VFVF

✏ Affirmation A : Vrai

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Traduisons les contraintes concernant l'appartenance de A et B à la courbe représentative de f :

- $A(1\,;2) \in C_f \implies f(1) = 2 \implies a + b + c + d = 2$
- $B(0\,;-3) \in C_f \implies f(0) = -3 \implies d = -3$

Aux points A et B, les tangentes à C_f sont parallèles à la droite d'équation $y = x$ signifie qu'elles ont le même coefficient directeur à savoir 1 donc :

- $\underbrace{f'(1)}_{\text{pente tangente en A}} = 1 \implies 3a + 2b + c = 1$
- $\underbrace{f'(0)}_{\text{pente tangente en B}} = 1 \implies c = 1$

On peut alors former le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c+d = 2 \\ d = -3 \\ 3a+2b+c = 1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = -3 \\ a+b = 4 \quad (\times 3) \\ 3a+2b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 1 \\ d = -3 \\ 3a+3b = 12 \quad (e_1) \\ 3a+2b = 0 \quad (e_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 1 \\ d = -3 \\ 3a = 12 - 3b \\ b = 12 \quad (e_1 - e_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 1 \\ d = -3 \\ a = -8 \\ b = 12 \quad (e_1 - e_2) \end{cases}$$

Donc $\boxed{f(x) = -8x^3 + 12x^2 + x - 3}$.

✏ Affirmation B : Faux

Nous allons établir le tableau de signe de $f'(x)$. Pour cela, on calcule d'abord les valeurs d'annulation de la dérivée $f'(x) = -24x^2 + 24x + 1$.

$$\begin{aligned}\Delta &= 24^2 - 4\times(-24)\times 1\\ &= 24^2 + 4\times 24\\ &= 24(24+4)\\ &= 24\times 28\\ &= 4\times 6\times 4\times 7\\ &= 4^2\times 42 \quad \text{donc } \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{42}\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-24-4\sqrt{42}}{-48} & &= \frac{-24+4\sqrt{42}}{-48}\\ &= \frac{-24}{-48} - \frac{4\sqrt{42}}{-48} & &= \frac{-24}{-48} + \frac{4\sqrt{42}}{-48}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{42}}{12} > 1 & &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{42}}{12} < 0\end{aligned}$$

Variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{42}}{12}$		0		$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{42}}{12}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$		
f	$+\infty$	↘	$f(x_2)$	↗	-3	↗	$f(x_1)$	↘	2	↘	$-\infty$

On constate que sur $]-\infty\,;0]$, f admet un minimum qui est $f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{42}}{12}\right)$ et il est atteint en $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{42}}{12}$.

✏ **Affirmation C : Vrai**

f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{42}}{12}\,;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{42}}{12}\right]$, or $[0\,;1] \subset \left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{42}}{12}\,;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{42}}{12}\right]$ donc f est croissante sur $[0\,;1]$.

✏ **Affirmation D : Faux**

En s'appuyant sur le tableau de variation, on constate que f peut s'annuler 1, 2 ou 3 fois suivant le signe de $f(x_1)$ et de $f(x_2)$. Pour que f s'annule exactement 2 fois, il faut que $f(x_1)$ ou que $f(x_2)$ soit égal à 0. Il est très difficile le jour du concours de calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sans calculatrice mais par contre on peut calculer $f(0) = -3$ et $f(1) = 2$ et ces résultats permettent d'affirmer que f s'annule 3 fois.

➽ Question 10 : VFVF

✏ Affirmation A : Vrai

Sur $[1\,;+\infty[$, $\ln x \geqslant 0$ et $x-1 \geqslant 0$ donc leur somme $g(x) = \ln x + (x-1) \geqslant 0$.

✏ Affirmation B : Faux

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, g'(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Donc g est concave sur $\mathcal{D}_g$.

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)' \times \ln x + \frac{x-1}{x} \times (\ln x)' \\
&= \frac{(x-1)'x - (x-1)(x)'}{x^2} \times \ln x + \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{x-1}{x^2} \\
&= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Γ, on étudie le signe de la différence :

$$\begin{aligned}
f(x) - \ln x &= \frac{x-1}{x} \ln x - \ln x \\
&= \ln x \left(\frac{x-1}{x} - 1\right) \\
&= \ln x \times \frac{x-1-x}{x} \\
&= -\frac{\ln x}{x}
\end{aligned}$$

x	0		1		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de Γ sur $]0\,;1[$ puis strictement en-dessous sur $]1\,;+\infty[$. Les deux courbes sont confondues en 1.

➽ Question 11 : FFVF

✎ Affirmation A : Faux

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

La tangente à C_f au point $Q(\ln 2\,; f(\ln 2))$ a pour coefficient directeur :

$$\begin{aligned} f'(\ln 2) &= \mathrm{e}^{\ln 2} + \mathrm{e}^{-\ln 2} \\ &= 2 + \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}} \qquad \text{car } \ln\frac{1}{a} = -\ln a \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

✎ Affirmation B : Faux

Les abscisses des points d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + 2 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} + 2 = 0 \\ &\iff \frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x - 1 + 2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 1 = 0 \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff X^2 + 2X - 1 = 0 \qquad \text{en posant } X = \mathrm{e}^x \text{ avec } X > 0 \\ &\iff X = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} \qquad \text{avec } \Delta = 8 \\ &\iff X = -1 - \sqrt{2} < 0 \qquad \text{ou} \qquad X = -1 + \sqrt{2} > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x = -1 + \sqrt{2} \\ &\iff \boxed{x = \ln(\sqrt{2} - 1)} \end{aligned}$$

Donx C_f coupe l'axe des abscisses en un seul et unique point.

✎ Affirmation C : Vrai

Le signe de la dérivée seconde nous donne des informations sur le point d'inflexion.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 1)}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 1 > 0 &\iff \mathrm{e}^x > 1 \\ &\iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^x + 1 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

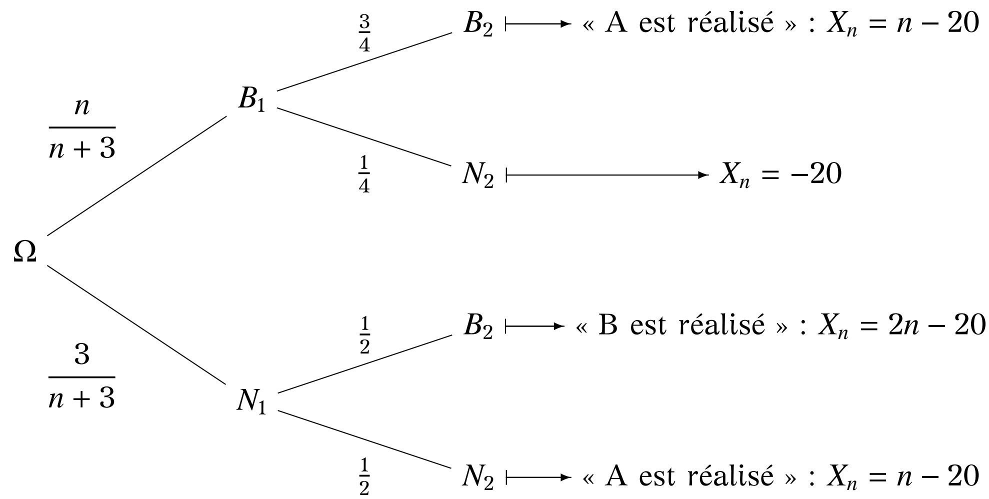
La dérivée s'annule en changeant de signe au point de coordonnées $(0\,;f(0))$. Or $f(0)=\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0+2=2$ donc $\Omega(0\,;2)$ est bien l'unique point d'inflexion de C_f.

✏ **Affirmation D : Faux**

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2)\mathrm{d}x\\ &= [\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2x]_0^1\\ &= (\mathrm{e}^1+\mathrm{e}^{-1}+2)-(\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0)\\ &= \mathrm{e}^1+\frac{1}{\mathrm{e}^1}+2-2\\ &= \boxed{\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}}}\end{aligned}$$

➽ Question 12 : VFFF

Construisons l'arbre de probabilité associé à la situation :



✏ Affirmation A : Vrai

$$p(A) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3n}{4(n+3)} + \frac{3 \times 2}{2(n+3) \times 2} = \boxed{\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)}.$$

✏ Affirmation B : Faux

$$p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2(n+3)}} = \frac{6}{4(n+3)}.$$

✏ Affirmation C : Faux

Calculons l'espérance de gain en fonction de n :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \frac{3n}{4(n+3)} \times (n-20) + \frac{n}{4(n+3)} \times (-20) + \frac{3}{2(n+3)} \times (2n-20) + \frac{3}{2(n+3)} \times (n-20) \\ &= \frac{3n^2 - 60n - 20n + 12n - 120 + 6n - 120}{4(n+3)} \\ &= \boxed{\frac{3n^2 - 62n - 240}{4n+12}} \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

$P(n) = 3n^2 - 62n - 240 = 0 \implies \Delta = (-62)^2 - 4 \times 3 \times (-240) = 6724 \implies \sqrt{\Delta} = 82.$

n	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		24		$+\infty$
$P(n)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'espérance est positive pour le joueur pour $\boxed{n \geqslant 24}$.

Partie 3 - Problème mathématique

Question 13 : VVFV

Affirmation A : Vrai

L'entreprise utilise 10 articles par jour, 250 jours par an, elle a donc un besoin de $10 \times 250 = 2\,500$ articles par an. Elle répartie cet achat en N commandes de Q articles, d'où :

$$NQ = 2\,500 \iff \boxed{N = \frac{2\,500}{Q}}$$

Affirmation B : Vrai

Le coût de son stock sur une année est égale à la somme de trois composantes :

- le coût d'achat des marchandises correspondant à l'achat de 2 500 articles à 10 € l'unité soit : $2\,500 \times 10 = 25\,000$ € ;
- le coût des commandes soit : $20 \times N$ € ;
- le coût de stockage soit : $0{,}20Q$ €.

Ainsi le coût de son stock sur une année est :

$$\begin{aligned} C_T(Q) &= 25\,000 + 20N + 0{,}20Q \\ &= 25\,000 + 20 \times \frac{2\,500}{Q} + 0{,}20Q \\ &= \boxed{25\,000 + \frac{50\,000}{Q} + 0{,}20Q} \end{aligned}$$

Affirmation C : Faux

Cherchons à établir les variations de la fonction C_T.

$$\begin{aligned} C_T'(Q) &= 50\,000 \times \left(-\frac{1}{Q^2}\right) + 0{,}2 \\ &= -\frac{50\,000}{Q^2} + \frac{0{,}2Q^2}{Q^2} \\ &= \frac{0{,}2Q^2 - 50\,000}{Q^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_T'(Q) = 0 &\iff \frac{0{,}2Q^2 - 50\,000}{Q^2} = 0 \\ &\iff 0{,}2Q^2 - 50\,000 = 0 \\ &\iff Q^2 = \frac{50\,000}{0{,}2} \\ &\iff Q^2 = \frac{50\,000}{\frac{1}{5}} \\ &\iff Q^2 = 50\,000 \times 5 \\ &\iff Q^2 = 250\,000 \\ &\iff Q = \sqrt{25 \times 10^4} \quad \text{ou} \quad Q = -\sqrt{25 \times 10^4} \\ &\iff Q = 5 \times 10^2 = 500 \quad \text{ou} \quad Q = -5 \times 10^2 = -500 \end{aligned}$$

Q	$-\infty$		-500		500		$+\infty$
$C'_T(Q)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Q	0		500		$+\infty$
$C'_T(Q)$		$-$	0	$+$	
C_T	$C_T(0)$	$\searrow$	$C_T(500)$	$\nearrow$	

C_T est minimal pour $\boxed{Q = 500}$.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Le coût minimal du stock est :

$$\begin{aligned} C_T(500) &= 25\,000 + \frac{50\,000}{500} + 0{,}2 \times 500 \\ &= 25\,000 + 100 + \frac{1}{5} \times 500 \\ &= 25\,100 + 100 \\ &= \boxed{25\,200\,€} \end{aligned}$$

➠ Question 14 : VFVV

✏ Affirmation A : Vrai

$C_m(x) = ax^2 + bx$ avec $C_m(1) = 3$ et $C_m(2) = 8$. On peut donc déduire le système suivant :

$$\begin{cases} C_m(1) = 3 \\ C_m(2) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 3 \quad (\times 4) \\ 4a + 2b = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4a + 4b = 12 \quad (e_1) \\ 4a + 2b = 8 \quad (e_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4a + 4b = 12 \\ 2b = 4 \quad (e_1 - e_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4a = 12 - 4 \times 2 \\ b = 2 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}}$$

On peut aussi plus simplement vérifier que si $a = 1$ et $b = 2$ alors l'expression de $C_m(x) = x^2 + 2x$ vérifie bien que $C_m(1) = 3$ et $C_m(2) = 8$.

✏ Affirmation B : Faux

Le coût total de x unités produites de P est la somme de trois composantes :

- le coût de la matière première $C_m(x)$;
- les frais fixes de 1 000 € ;
- le produit de la vente de la récupération des déchets qui est de $10x$ € et qui vient en déduction du coût total.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} C(x) &= C_m(x) + 1\,000 - 10x \\ &= x^2 + 2x - 10x + 1\,000 \\ &= \boxed{x^2 - 8x + 1\,000} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

Si $x = 2$ alors $C(2) = 2^2 - 8 \times 2 + 1\,000 = 4 - 16 + 1\,000 = \boxed{988\,€}$.

✏ Affirmation D : Vrai

On peut résoudre l'équation du second degré $x^2 - 8x + 1\,000 = 1\,048$ ou étudier rapidement les variations de C et calculer $C(10) = 10^2 - 8 \times 10 + 1\,000 = 1\,020$.

x	0		4		10		α		$+\infty$
$C'(x)=2x-8$		$-$	0			$+$			
C	1000	$\searrow$	$C(4)=984$	$\nearrow$	1020	$\nearrow$	1048	$\nearrow$	

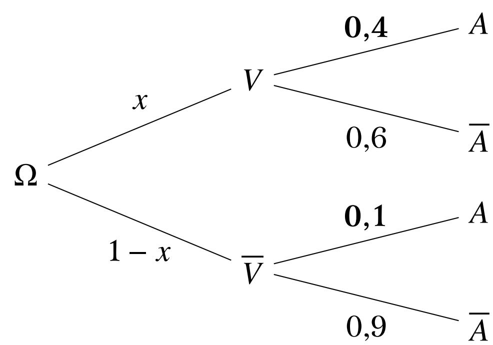
Question 15 : FFVV

On définit les événements suivants :

- T : « avoir vu la publicité à la télévision » ;
- P : « avoir vu la publicité dans la presse locale » ;
- V : « avoir vu la publicité » ;
- A : « avoir acheté le produit ».

L'énoncé permet de construire les deux représentations suivantes, l'une sous forme de tableau, l'autre sous forme d'arbre (les valeurs en gras sont celles lues dans l'énoncé, les autres sont déduites par complémentarité) :

	T	$\overline{T}$	Total
P	**0,10**	0,02	**0,12**
$\overline{P}$	0,08	0,80	0,88
Total	**0,18**	0,82	**1**



✏ Affirmation A : Faux

D'après le tableau :

$$\begin{aligned} p(V) &= p(P\cap T) + p(P\cap \overline{T}) + p(\overline{P}\cap T) \\ &= 0{,}10 + 0{,}02 + 0{,}08 \\ &= \boxed{0{,}20} \quad \text{donc } \boxed{x = 0{,}2} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Faux

D'après l'arbre de probabilité :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(V\cap A) + p(\overline{V}\cap A) \\ &= p(V)\times p_V(A) + p(\overline{V})\times p_{\overline{V}}(A) \\ &= 0{,}2\times 0{,}4 + 0{,}8\times 0{,}1 \\ &= 0{,}08 + 0{,}08 \\ &= \boxed{0{,}16} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$p(\overline{V}\cap A) = 0{,}8\times 0{,}1 = \boxed{0{,}16}$.

✏ Affirmation D : Vrai

$$p_A(V) = \frac{p(V\cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}2\times 0{,}4}{0{,}16} = \frac{0{,}08}{0{,}16} = \boxed{0{,}5}.$$

➽ Question 16 : VVFF

✏ **Affirmation A : Vrai**

Si $x = 1\,000$ alors le chiffre d'affaires mensuel relatif au produit P_1 noté C_1 est :

$$\begin{aligned} C_1 &= 1\,000(200 - 0{,}02 \times 1\,000) \\ &= 1\,000(200 - 20) \\ &= 1\,000 \times 180 \\ &= \boxed{180\,000\,€} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation B : Vrai**

50 unités de P_1 sont produites en 1 h donc il faut $(x/50)$ h pour produire x unités de P_1. On peut s'en assurer en faisant un tableau de proposrtionnalité :

Heures	1	$x \times 1 \div 50$
Unités	50	x

On raisonne de manière identique pour les unités produites par P_2. De plus, la contrainte est que la machine est utilsé 100 h par mois. Il vient donc la relation :

$$\frac{x}{50} + \frac{y}{25} = 100$$

✏ **Affirmation C : Faux**

Le chiffre d'affaires mensuel total est :

$$\begin{aligned} CA(x,y) &= x(200 - 0{,}02x) + y(100 - 0{,}01y \\ &= 200x - 0{,}02x^2 + 100y - 0{,}01y^2 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{x}{50} + \frac{y}{25} &\iff 100 \\ &\iff \frac{x + 2y}{50} = 100 \\ &\iff x + 2y = 100 \times 50 \\ &\iff x = 5\,000 - 2y \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} CA(x) &= 200(5\,000 - 2y) - 0{,}02(5\,000 - 2y)^2 + 100y - 0{,}01y^2 \\ &= 10^6 - 400y - 2 \times 10^{-2}(25 \times 10^6 - 2 \times 10^4 + 4y^2) + 100y - 0{,}01y^2 \\ &= 10^6 - 300y - 50 \times 10^4 + 4 \times 10^2 y - 8 \times 10^{-2} y^2 - 0{,}01y^2 \\ &= -0{,}08y^2 - 0{,}01y^2 - 300y + 400y + 1\,000\,000 - 500\,000 \\ &= \boxed{-0{,}09y^2 + 100y + 500\,000} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation D : Faux**

Si $x = 3\,000$ alors $3\,000 + 2y = 5\,000 \implies y = 1\,000$ et :

$$\begin{aligned} CA(1\,000) &= -9 \times 10^{-2} \times (10^3)^2 + 100 \times 10^3 + 500\,000 \\ &= -9 \times 10^4 + 10^5 + 500\,000 \\ &= -90\,000 + 100\,000 + 500\,000 = \boxed{510000\,€} \end{aligned}$$

➽ Question 17 : VFVV

✏ Affirmation A : Vrai

Le coût de production C_p d'une unité de P_3 est fonction de l'usine de production et du nombre d'heures de production. On a $C_p = 3 \times 4 + 2 \times 6 = \boxed{24\,€}$.

✏ Affirmation B : Faux

Si l'entreprise abandonne la fabrication du produit P_2 alors d'après la question précédente, elle va produire uniquement le produit P_1 selon la relation $\dfrac{x}{50} = 100 \implies x = 5\,000$ unités qui sont toutes vendues. Or la demande de produit P_3 s'élève à $30\,000$ unités et la part de P_1 dans P_3 est alors de : $\dfrac{5\,000}{30\,000} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

✏ Affirmation C : Vrai

Le coût total d'une unité de P_3 est la somme de trois composantes :

- le coût des matières premières égal à 15 € ;
- le coût de production égal à 24 € ;
- le coût de distribution égal à 9 €.

Soit un coût total de 48 €. Or le prix de vente s'élève à 60 € donc la marge sur coût variable d'une unité de P_3 est $60 - 48 = 12$ €. La marge sur coût variable annuelle noté MCV des 30 000 unités vendues de produit P_3 est alors de :

$$\begin{aligned} MCV &= 12 \times 30\,000 \\ &= \boxed{360\,000\,€} \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

Si l'entreprise diminue de 25% le coût de l'heure dans l'atelier U alors le coût horaire de production dans U est ramené à $4 - \dfrac{25}{100} \times 4 = 3$ €.

Le coût total de P_3 est alors de : $15 + 9 + 3 \times 3 + 2 \times 6 = 45$ €.

La marge sur coût variable d'une unité de P_3 est alors de : $60 - 45 = 15$ €.

La marge sur coût variable annuelle des 30 000 unités de P_3 est alors de : $30\,000 \times 15 = 450\,000$ €.

Ce qui correspond à une augmentation de $450\,000 - 360\,000 = 90\,000$ € par rapport à la situation initiale.

➽ Question 18 : VVVF

✏ Affirmation A : Vrai

Le montant des intérêts I s'obtient à partir de la valeur de $S_0 = 360\,000$ calculé à la question précédente de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
I &= S_2 - S_0 \\
&= S_0\left(1+\frac{2}{100}\right)^2 - S_0 \\
&= S_0 \times (1{,}02)^2 - S_0 \\
&= S_0(1{,}040\,4 - 1) \\
&= 360\,000 \times 0{,}040\,4 \\
&= \boxed{14\,544\,€}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

L'entreprise place les 500 000 € correspondant au prix d'achat de la machine destinée à produire le produit P_3. On a alors $S_0 = 500\,000$ et après 5 années de capitalisation $S_5 = 600\,000$, d'où l'équation :

$$\begin{aligned}
6\times 10^5 = 5\times 10^5(1+i)^5 &\iff \frac{6\times 10^5}{5\times 10^5}(1+i)^5 \\
&\iff \frac{6}{5} = (1+i)^5 \\
&\iff \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = 1+i \\
&\iff \boxed{i = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} - 1}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned}
S_n = S_0(1+i)^n &\iff \frac{S_n}{S_0} = (1+i)^n \\
&\iff \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = \ln(1+i)^n \\
&\iff \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = n\ln(1+i) \quad \text{car } \ln a^n = n\ln a \\
&\iff \ln S_n - \ln S_0 = n\ln\left(1+\frac{2}{100}\right) \quad \text{car } \ln ab = \ln a - \ln b \\
&\iff \boxed{n = \frac{\ln(541\,216) - \ln(500\,000)}{\ln(1{,}02)}}
\end{aligned}$$

✏ **Affirmation D : Faux**

Si l'entreprise place le montant $S_0 = 500\,000$ à un taux d'intérêt de 2% les trois premières années alors elle disposera au bout de trois ans d'un capital égal à :

$$\begin{aligned} S_3 &= S_0(1+i)^3 \\ &= S_0\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 \\ &= S_0 \times (1{,}02)^3 \end{aligned}$$

Ce capital sert de placement initial pour les trois années suivantes dont le taux d'intérêt est à 4%. On a donc :

$$\begin{aligned} S_6 &= S_3(1+i)^3 \\ &= S_0 \times (1{,}02)^3 \times \left(1+\frac{4}{100}\right)^3 \\ &= S_0 \times (1{,}02)^3 \times (1{,}04)^3 \\ &= S_0 \times (1{,}02 \times 1{,}04)^3 \\ &= \boxed{500\,000 \times (1{,}060\,8)^3} \end{aligned}$$