Concours ACCÈS 2015

Corrigé détaillé de l'épreuve de **Raisonnement Logique & Mathématiques**

Réponses aux questions

Partie 1 - Raisonnement logique

Question 1 : FVFV

Commençons par établir un tableau à triple entrée des effectifs dans lequel on omet volontairement les effectifs totaux afin de ne pas le surcharger. Celui-ci permet simplement d'avoir une représentation plus visuelle des effectifs.

		Hommes	Femmes
Cadres	Mariés	a	b
	Non mariés	c	d
Non cadres	Mariés	e	f
	Non mariés	g	h

D'après les données de l'énoncé, il vient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+c+e+g &=& 300 \\ a+b+c+d &=& 352 \\ a+b+e+f &=& 424 \\ a+c &=& 188 \\ a+e &=& 166 \\ a+b &=& 208 \\ a &=& 144 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c+e+g &=& 156 \\ b+c+d &=& 208 \\ b+e+f &=& 280 \\ c &=& 44 \\ e &=& 22 \\ b &=& 64 \\ a &=& 144 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} g &=& 90 \\ d &=& 100 \\ f &=& 194 \\ c &=& 44 \\ e &=& 22 \\ b &=& 64 \\ a &=& 144 \end{array}\right.$$

Les femmes étant 500 au total, on a $h = 500 - 64 - 100 - 194 = 142$. Le tableau ainsi complété permet de répondre à chaque affirmation :

		Hommes	Femmes
Cadres	Mariés	144	64
	Non mariés	44	100
Non cadres	Mariés	22	194
	Non mariés	90	142

✏ Affirmation B : Vrai

Il y a $194 + 142 = 336$ femmes non cadres.

✏ Affirmation C : Faux

Il y a $144 + 64 + 44 + 100 + 22 + 90 = 464$ salariés cadres ou de sexe masculin.

➽ Question 2 : FFFF

Dans une entreprise, chaque homme a deux fois plus de collègues de sexe féminin que de collègues de sexe masculin. Prenons des exemples concrets traduisant cette situation. Si on considère un homme en particulier de cette entreprise alors il a :

- 1 collègue homme et 2 collègues femmes ;
- ou 2 collègues homme et 4 collègues femmes ;
- ou 3 collègues homme et 6 collègues femmes ;
- ...

En d'autres termes s'il y a h hommes et f femmes dans l'entreprise, l'homme qu'on a considéré a $h-1$ collègues hommes et $f=2(h-1)$ collègues femmes. Il y a donc dans l'entreprise N salariés tel que : $N=h+f=h+2(h-1)=3h-2$.

30% des salariés ont participé à un stage de secourisme, ce qui représente un tiers des femmes et 8 hommes donc :

$$\begin{aligned}
\frac{30}{100}\times N=\frac{1}{3}f+8 &\iff 0{,}3(3h-2)=\frac{1}{3}2(h-1)+8\\
&\iff 0{,}9h-0{,}6=\frac{2}{3}h-\frac{2}{3}+8\\
&\iff \frac{9}{10}h-\frac{2}{3}h=8-\frac{2}{3}+\frac{6}{10} \quad \text{(dénominateur commun : 30)}\\
&\iff 27h-20h=8\times 30-20+18\\
&\iff 8h=238\\
&\iff h=34
\end{aligned}$$

Il y a donc dans l'entreprise 100 salariés dont 34 hommes et 66 femmes.

✎ Affirmation A : Faux

Si on considère une femme de cette entreprise, elle a 34 collègues hommes et 65 collègues femmes et $65\neq 2\times 34$.

✎ Affirmation B : Faux

8 hommes ont suivi la formation de secourisme et $\dfrac{8}{34}\times 100\neq 30\%$.

✎ Affirmation C : Faux

Le nombre de salariés de sexe masculin est égal à 34.

✎ Affirmation D : Faux

8 hommes et $\dfrac{1}{3}\times 66=22$ femmes ont suivi la formation de secourisme, soit exactement 30 personnes.

➽ Question 3 : FFVV

Soit r_i le réglement du mois numéro i (i variant de 1 à n) alors d'après l'énoncé :

- $r_1 = 200$ car Marie règle 200 € le premier mois ;
- $r_{i+1} = r_i + a$ car Marie règle chaque mois a € de plus que le mois précédent.

✏ Affirmation A : Faux

D'après les formules sur les suites arithmétiques :

$$r_n = r_1 + (n-1) \times a$$

✏ Affirmation B : Faux

La somme S des n premiers termes du suite arithmétique est :

$$\begin{aligned} S &= \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2} \\ &= n \times \frac{200 + (200 + (n-1)a)}{2} \\ &= n \times \frac{400 + (n-1)a}{2} \end{aligned}$$

Si $n = 24$ et $a = 10$ alors :

$$\begin{aligned} S &= 24 \times \frac{400 + 23 \times 10}{2} \\ &= 24 \times 315 \\ &= 7560 \neq 10320 \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

Si $n = 12$ et $a = 20$ alors :

$$\begin{aligned} S &= 12 \times \frac{400 + 11 \times 20}{2} \\ &= 12 \times 310 \\ &= 3720 \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

D'après les calculs précédents

$$\begin{aligned} S &= n \times \frac{400 + (n-1)a}{2} \\ &= n\left(\frac{400}{2} + \frac{(n-1)a}{2}\right) \\ &= \left(200 + (n-1) \times \frac{a}{2}\right) \times n \end{aligned}$$

➽ Question 4 : FVVV

C'est une question dans laquelle il convient d'envisager les différents scénarios possibles afin de découvrir comment était vêtu l'homme recherché. N'oublions pas que pour chaque scénario, l'un d'eux a tout faux et les autres ne se trompent qu'une fois.

Scénario 1 : Supposons que c'est Charly qui se trompe sur toute la ligne et rassemblons alors les informations dans un tableau.

Taille	Cheveux	Haut	Bas
Petit	Blond ou brun	T-shirt blanc	Jean

Si le voleur est blond alors Danièle a tout bon, ce qui est impossible et si le voleur est brun alors Elie a tout bon, ce qui est impossible donc ce scénario n'est pas le bon.

Scénario 2 : Supposons que c'est Danièle qui se trompe sur toute la ligne.

Taille	Cheveux	Haut	Bas
Petit ou grand	Brun	Chemise rouge	Short

Si le voleur est petit alors Fabienne a tout faux, ce qui est impossible et si le voleur est grand alors Charly a tout bon, ce qui est impossible donc ce scénario n'est pas le bon.

Scénario 3 : Supposons que c'est Elie qui se trompe sur toute la ligne.

Taille	Cheveux	Haut	Bas
Grand	Blond	Chemise rouge	Jean ou short

Si le voleur a un jean alors Charly, Danièle et Fabienne ne se trompent que sur un seul point donc c'est le bon scénario. Continuons tout de même notre raisonnement afin de vérifier que les autres scénarios ne sont pas possible. Si le voleur a un short alors Charly a tout bon, ce qui est impossible donc ce scénario n'est pas le bon.

Scénario 4 : Supposons que c'est Fabienne qui se trompe sur toute la ligne.

Taille	Cheveux	Haut	Bas
Grand	Brun	T-shirt blanc ou chemise rouge	Short

Si le voleur a un t-shirt blanc alors Danièle se trompe sur deux points, ce qui est impossible et si le voleur a une chemise rouge alors Charly a tout bon, ce qui est impossible donc ce scénario n'est pas le bon.

La description du voleur est donc la suivante et elle permet de répondre à chaque affirmation.

Taille	Cheveux	Haut	Bas
Grand	Blond	Chemise rouge	Jean

Question 5 : FFFV

Commençons par regrouper les informations de l'énoncé dans un tableau dans lequel les différents coureurs sont représentés par les initiales de leur prénom.

Coureur	1ère position	2ième position	3ième position	4ième position	5ième position
Aristide		D		A	
Barnabé					
Caligula	D	C			
Dodu	B				D
Eustache		E	D		

Cherchons maintenant à déterminer l'ordre d'arrivée en gardant à l'esprit que chaque coureur fourni un renseignement vrai et l'autre faux.

Supposons qu'Aristide a bien placé D alors Caligula l'a mal placé et il a donc bien placé C. C'est impossible car cela reviendrait à dire que D et C sont arrivés tous deux en 2ième position donc Aristide a mal placé D et bien placé A.

1ère position	2ième position	3ième position	4ième position	5ième position
			A	

Supposons que Caligula a bien placé D alors Dodu l'a mal placé et il a donc bien placé B. C'est impossible car cela reviendrait à dire que D et B sont arrivés tous deux en 1ière position donc Caligula a mal placé D et bien placé C.

1ère position	2ième position	3ième position	4ième position	5ième position
	C		A	

Supposons que Dodu a bien placé D alors Eustache l'a mal placé et il a donc bien placé E. C'est impossible car on sait déjà que C est arrivé en 2ième position et cela reviendrait donc à dire que C et E sont arrivés tous deux à la même place donc Dodu a mal placé D et bien placé B.

1ère position	2ième position	3ième position	4ième position	5ième position
B	C		A	

Eustache a donc forcément mal placé E car la 2ième position est déjà occupé par C et il a donc bien placé D en 3ième position. Reste alors la 5ième position qui est forcément celle occupée par Eustache. L'ordre d'arrivée est donc le suivant et il permet de répondre à chaque affirmation.

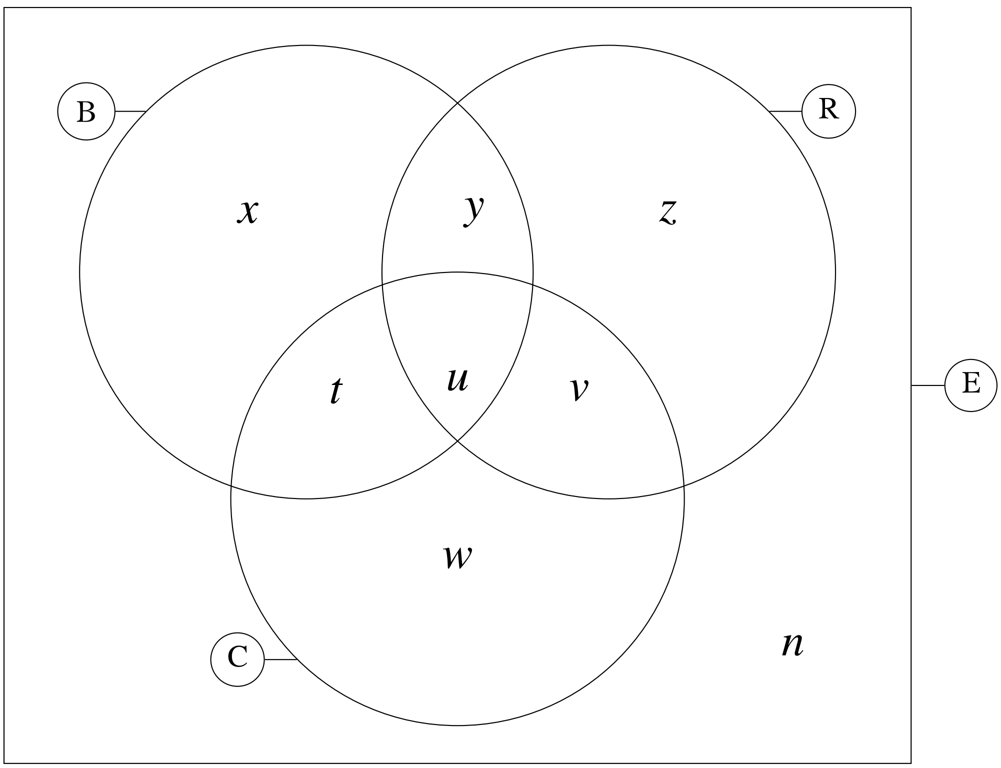
1ère position	2ième position	3ième position	4ième position	5ième position
B	C	D	A	E

➠ Question 6 : FVVF

On note :

- E l'ensemble des chiens de la société protectrice des animaux ;
- B l'ensemble des chiens qui savent faire le beau ;
- R l'ensemble des chiens qui savent rapporter ;
- et C l'ensemble des chiens qui savent sauter dans un cerceau.

On construit alors le diagramme suivant dans lequel chaque inconnue représente le nombre de chiens possédant uniquement la propriété de l'ensemble auquel il appartient. Par exemple, x représente le nombre de chiens sachant faire le beau mais ne sachant ni rapporter, ni sauter dans un cerceau.



Traduisons maintenant chaque information de l'énoncé en une équation :

- 130 chiens savent faire le beau signifie $x + y + u + t = 130$;
- 80 savent rapporter donc $y + u + v + z = 80$;
- 55 savent faire le beau et rapporter donc $y + u = 55$ mais 10 d'entre eux ne sautent pas dans un cerceau d'où $y = 10$;
- 100 ne savent pas faire le beau donc $z + v + w + n = 100$;
- 110 sautent dans un cerceau d'où $t + u + v + w = 110$;
- il y a deux fois plus de chiens à seulement savoir faire le beau qu'à savoir rapporter sans faire le beau signifie $x = 2(z + v)$;
- il y a deux fois moins de chiens à ne savoir que rapporter que de chiens ne sachant rien faire se traduit par $n = 2z$.

On obtient alors un système d'équations assez difficile à résoudre qu'il convient d'observer attentivement avant de se lancer.

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+\boxed{y+u}+t &=& 130 & (L_1)\\ \boxed{y+u}+v+z &=& 80 & (L_2)\\ \boxed{y+u} &=& 55 & (L_3)\\ y &=& 10 & (L_4)\\ z+v+w+n &=& 100 & (L_5)\\ t+u+v+w &=& 110 & (L_6)\\ x &=& 2(z+v) & (L_7)\\ n &=& 2z & (L_8) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+55+t &=& 130 & (L_1)\\ 55+v+z &=& 80 & (L_2)\\ \boxed{y}+u &=& 55 & (L_3)\\ \boxed{y} &=& 10 & (L_4)\\ z+v+w+n &=& 100 & (L_5)\\ t+u+v+w &=& 110 & (L_6)\\ x &=& 2(z+v) & (L_7)\\ n &=& 2z & (L_8) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+t &=& 75 & (L_1)\\ \boxed{v+z} &=& 25 & (L_2)\\ \boxed{u} &=& 45 & (L_3)\\ y &=& 10 & (L_4)\\ \boxed{z+v}+w+n &=& 100 & (L_5)\\ t+\boxed{u}+v+w &=& 110 & (L_6)\\ x &=& 2(\boxed{z+v}) & (L_7)\\ n &=& 2z & (L_8) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} \boxed{x}+t &=& 75 & (L_1)\\ v+z &=& 25 & (L_2)\\ u &=& 45 & (L_3)\\ y &=& 10 & (L_4)\\ w+n &=& 75 & (L_5)\\ t+v+w &=& 65 & (L_6)\\ \boxed{x} &=& 50 & (L_7)\\ n &=& 2z & (L_8) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} \boxed{t} &=& 25 & (L_1)\\ v+z &=& 25 & (L_2)\\ u &=& 45 & (L_3)\\ y &=& 10 & (L_4)\\ w+n &=& 75 & (L_5)\\ \boxed{t}+v+w &=& 65 & (L_6)\\ x &=& 50 & (L_7)\\ n &=& 2z & (L_8) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} t &=& 25 & (L_1)\\ v+z &=& 25 & (L_2)\\ u &=& 45 & (L_3)\\ y &=& 10 & (L_4)\\ w+n &=& 75 & (L_5)\\ v+w &=& 40 & (L_6)\\ x &=& 50 & (L_7)\\ n &=& 2z & (L_8) \end{array}\right.$$

On peut réduire le système à :

$$\begin{cases} v+z = 25 & (L_1) \\ w+n = 75 & (L_2) \\ v+w = 40 & (L_3) \\ n = 2z & (L_4) \end{cases} \iff \begin{cases} v+z = 25 & (L_1) \\ w+n = 75 & (L_2) \\ w-z = 15 & (L_3) \leftarrow (L_3)-(L_1) \\ n-2z = 0 & (L_4) \end{cases}$$

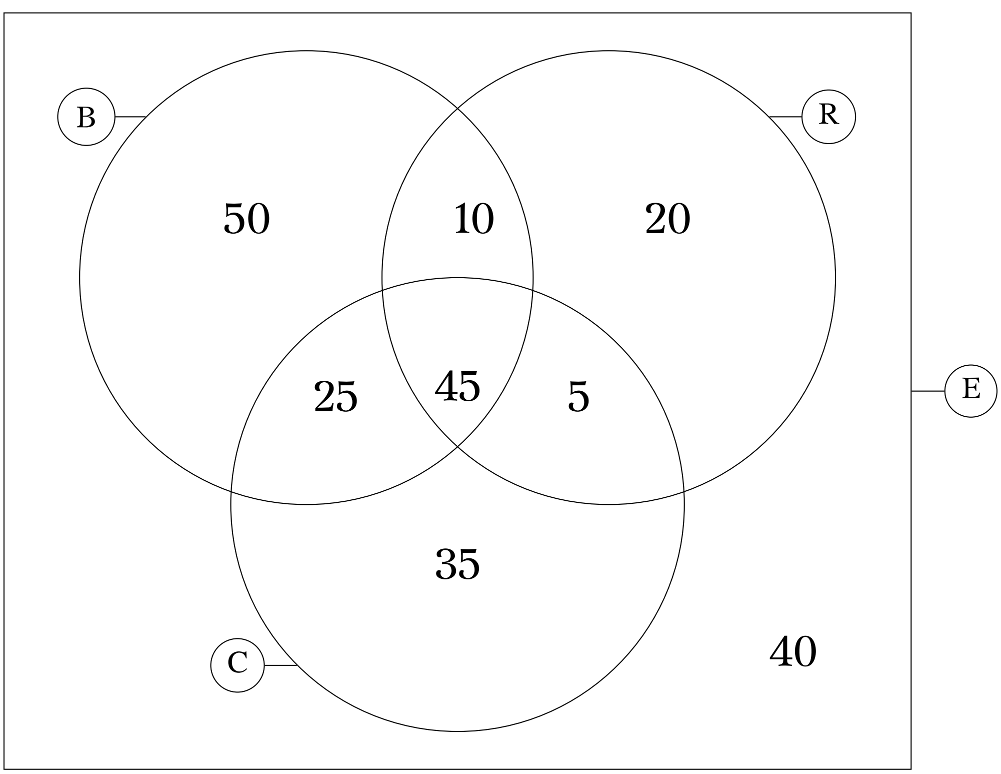
$$\iff \begin{cases} v+z = 25 & (L_1) \\ n+z = 60 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_3) \\ w-z = 15 & (L_3) \\ n-2z = 0 & (L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v+z = 25 & (L_1) \\ n+z = 60 & (L_2) \\ w-z = 15 & (L_3) \\ 3z = 60 & (L_4) \leftarrow (L_2)-(L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v+\boxed{z} = 25 & (L_1) \\ n+\boxed{z} = 60 & (L_2) \\ w-\boxed{z} = 15 & (L_3) \\ \boxed{z} = 20 & (L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v = 5 & (L_1) \\ n = 40 & (L_2) \\ w = 35 & (L_3) \\ z = 20 & (L_4) \end{cases}$$

On peut donc compléter le diagramme et répondre aux différentes affirmations.



✏ **Affirmation A : Faux**

Il y en a 5 : $R \cap C \cap \overline{B}$.

✏ **Affirmation B : Vrai**

$20 + 5 = 25$: $R \cap \overline{C} \cap \overline{B} + R \cap C \cap \overline{B}$.

✏ **Affirmation C : Vrai**

$B \cap \overline{C} \cap \overline{R}$: 50.

✏ **Affirmation D : Faux**

Il y en a 40.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

Question 7 : VVVF

✏ Affirmation A : Vrai

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f'(x) &= \frac{(12x^2+12x+4)(x+1)^4 - 4(4x^3+6x^2+4x+1)(x+1)^3}{(x+1)^8} \\ &= \frac{(x+1)^3((12x^2+12x+4)(x+1) - 4(4x^3+6x^2+4x+1))}{(x+1)^8} \\ &= \frac{12x^3+12x^2+4x+12x^2+12x+4-16x^3-24x^2-16x-4}{(x+1)^5} \\ &= \boxed{\frac{4x^3}{(x+1)^5}}\end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

On constate en dressant le tableau de variations de la fonction f que celle-ci admet un maximum local en $x=0$.

x	-1		0		$+\infty$
$-4x^3$		$+$	0	$-$	
$(x+1)^5$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	

✏ **Affirmation C : Vrai**

Le calcul de la dérivée seconde de la fonction f permet de déduire la concavité de f et ses éventuels points d'inflexion.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, f''(x) &= \frac{-12x^2(x+1)^5 + 4x^3 \times 5(x+1)^4}{(x+1)^{1}0} \\
&= \frac{(x+1)^4(-12x^2(x+1)) + 20x^3}{(x+1)^{1}0} \\
&= \frac{-12x^3 - 12x^2 + 20x^3}{(x+1)^6} \\
&= \frac{8x^3 - 12x^2}{(x+1)^6} \\
&= \boxed{-\frac{4x^2(2x-3)}{(x+1)^6}}
\end{aligned}$$

On constate en dressant le tableau de signe de la dérivée seconde de f que celle-ci admet deux points d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule, l'un en $x = 0$, l'autre $x = \dfrac{3}{2}$.

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^6$	0	$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		concave		concave		convexe	

✏ **Affirmation D : Faux**

D'après le tableau précédent, f est convexe pour tout $x \in \left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

➽ Question 8 : VVVF

✏ Affirmation A : Vrai

f est une fonction polynôme de degré 7. Or toute fonction polynôme est définie et dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= (x)'(1+x^2)^3 + x((1+x^2)^3)' \\ &= (1+x^2)^3 + x \times 3 \times 2x(1+x^2)^2 \qquad ((u^n)' = nu'u^{n-1}) \\ &= (1+x^2)^2((1+x^2)+6x^2) \\ &= \boxed{(1+x^2)^2(7x^2+1)}\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) &= \frac{1}{8} \times 4 \times 2x(1+x^2)^3 \\ &= \frac{8x}{8}(1+x^2)^3 \\ &= x(1+x^2)^3 \\ &= \boxed{f(x)}\end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{8}(1+1^2)^4 - \frac{1}{8}(1+0^2)^4 \\ &= \frac{2^4 - 1^4}{8} \\ &= \boxed{\frac{15}{8}}\end{aligned}$$

➽ Question 9 : FVVV

✏ Affirmation A : Faux

$$\forall x \in [0\,;10], C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}10x + 8$$

Le discriminant Δ de $C'(x)$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2{,}10)^2 - 4 \times 0{,}15 \times 8\\ &= (21 \times 10^{-1})^2 - 32 \times 15 \times 10^{-2}\\ &= 21^2 \times 10^{-2} - 32 \times 15 \times 10^{-2}\\ &= (441 - 480) \times 10^{-2} < 0\end{aligned}$$

Donc le polynôme n'admet pas de racines et il est du signe de a sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $C'(x) > 0$ et C est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\,;10\,000]$.
Cependant, il faut noter que l'ensemble de définition de C n'est pas $[0\,;10\,000]$ mais $[0\,;10]$ car x est en *milliers* de clés produites et l'ensemble de définition proposé pour C dans l'affirmation est donc inexact. Affirmation un peu tordue donc qui vise à piéger un maximum d'élèves.

✏ Affirmation B : Vrai

$$\forall x \in [0\,;10], C''(x) = 0{,}30x - 2{,}10$$

$$\begin{aligned}C''(x) = 0 &\iff x = \frac{2{,}1}{0{,}3}\\ &\iff x = \frac{3 \times 7 \times 10^{-1}}{3 \times 10^{-1}}\\ &\iff x = 7\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

Réalisons le tableau de signe de la dérivée seconde afin de déduire la concavité de C.

x	0		7		10
$C''(x)$		$-$	0	$+$	
C		concave		convexe	

✏ Affirmation D : Vrai

Par définition de la concavité, une fonction f croissante sur I et concave voit sa croissance ralentir. Une fonction f croissante sur I et convexe voit sa croissance s'accélérer.

➽ Question 10 : VVVF

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln x$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

✏ **Affirmation A : Vrai**

Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e}) &\iff y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) + \ln \mathrm{e} \\ &\iff y = \frac{1}{\mathrm{e}}x - 1 + 1 \\ &\iff y = \frac{1}{\mathrm{e}}x \\ &\iff \boxed{y = \mathrm{e}^{-1}x} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation B : Vrai**

Pour tout $x > 0$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc f est concave et par définition, sa courbe représentative C_f est entièrement située au-dessous de ses tangentes.

✏ **Affirmation C : Vrai**

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\ln \mathrm{e}^x = x$ et pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ donc la fontion ln est la réciproque de la fonction exponentielle et leurs courbes représentatives sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

✏ **Affirmation D : Faux**

Pour tout $x > 0$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

➡ Question 11 : FVVV

Soit $g(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$ et $f(x) = (1+x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(x+1)}$.

✏ Affirmation A : Faux

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\mathrm{e}^{x\ln(x+1)})' \\
&= (x\ln(x+1))'\mathrm{e}^{x\ln(x+1)} \\
&= ((x)'\ln(x+1) + x(\ln(x+1))')(1+x)^x \\
&= \left(\ln(x+1) + x\frac{x'}{x+1}\right)(1+x)^x \\
&= \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)(1+x)^x \\
&= (1+x)^x\ln(x+1) + \frac{x(1+x)^x}{x+1} \\
&= \boxed{(1+x)^x\ln(x+1) + x(1+x)^{x-1}}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

$g(x)$ existe si et seulement si $x+1>0 \iff x>-1$ donc $\mathcal{D}_f =]-1\,;+\infty[$.

✏ Affirmation C : Vrai

En calculant la dérivée de la fonction f, on constate que :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)(1+x)^x \\
&= \boxed{f(x)g(x)}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

$$\begin{aligned}
f''(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&= f(x)g(x)g(x) + f(x)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2}\right) \\
&= f(x)(g(x))^2 + f(x)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) \\
&= f(x)(g(x))^2 + f(x)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \\
&= f(x)\left((g(x))^2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1>0$, $(x+1)^2>0$ et $(g(x))^2>0$. De plus, $f(x)>0$ car c'est une fonction exponentielle donc $f'(x)>0$ et f est donc strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

➠ Question 12 : FVFV

D'aprés l'énoncé, $p(A) = \dfrac{500}{10\,000} = 0{,}05$, $p(B) = \dfrac{400}{10\,000} = 0{,}04$ et $p(A \cap B) = \dfrac{200}{10\,000} = 0{,}02$. Un tableau permet de calculer les probabilités restantes :

	A	$\overline{A}$	Total
B	**0,02**	0,02	**0,04**
$\overline{B}$	0,03	0,93	0,96
Total	**0,05**	0,95	**1**

✏ Affirmation A : Faux

La probabilité pour que l'appareil ne présente aucun défaut est $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}93$.

✏ Affirmation B : Vrai

La probabilité pour que l'appareil présente le défaut A ou le défaut B est :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0{,}05 + 0{,}04 - 0{,}02 \\ &= 0{,}07 \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Faux

La probabilité que l'appareil présente le défaut A sachant qu'il présente le défaut B est :

$$\begin{aligned} p_B(A) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{0,02}{0,04} \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

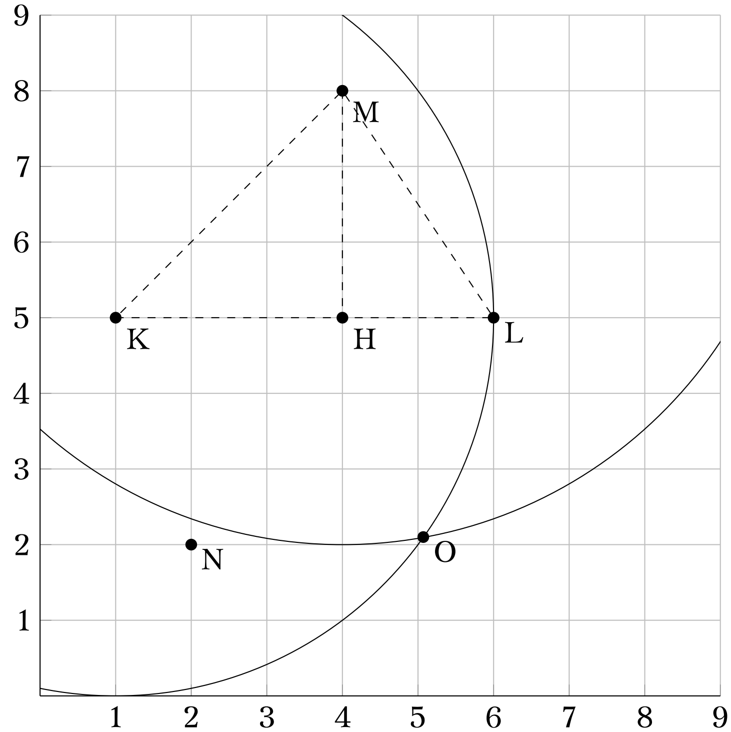
✏ Affirmation D : Vrai

On peut lire directement dans le tableau des probabilités que $p(A \cap \overline{B}) = 0{,}03$.

Partie 3 - Problème mathématique

➠ Question 13 : VFVV

Commençons par positionner les villes sur un repère et à chercher à déterminer la position de la ville O au compas. Traçons pour cela deux cercles, l'un de centre K et de rayon 5, l'autre de centre M et de rayon 6. La ville O est à l'intersection de ces deux cercles et au sud de M.



✏ Affirmation A : Vrai

$KL = x_L - x_K = 5$ soit 500 km.

✏ Affirmation B : Faux

$KM = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 3 \times 1{,}4 \simeq 4{,}2$ soit environ 420 km.

✏ Affirmation C : Vrai

$LM = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \simeq 3{,}6$ soit environ 360 km.
Sans calculatrice on peut effectuer à la main le produit $3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25$ donc $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ et $\sqrt{13} > \sqrt{12{,}25}$.

✏ Affirmation D : Vrai

La longueur du parcours KMLK est donc supérieure à $5 + 4{,}2 + 3{,}5 = 12{,}7$ donc supérieure à 1270 km.

➽ Question 14 : VFFV

✏ **Affirmation A : Vrai**

L'aire du triangle KLM vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{KLM} &= \frac{KL \times HM}{2}\\ &= \frac{500 \times 300}{2}\\ &= \frac{15 \times \times 10^4}{2}\\ &= 7{,}5 \times 10^4 = 75\,000 \text{ km}^2\end{aligned}$$

✏ **Affirmation B : Faux**

L'aire du triangle KLN est la même que celle du triangle KLM donc :

$$\mathcal{A}_{KMLN} = 2 \times 75\,000 = 150\,000 \text{ km}^2$$

✏ **Affirmation C : Faux**

Sur la figure, on constate que les coordonnées de O ne sont pas $(5\,;2)$.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Rappelons l'équation d'un cercle de centre Ω et de rayon r :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$$

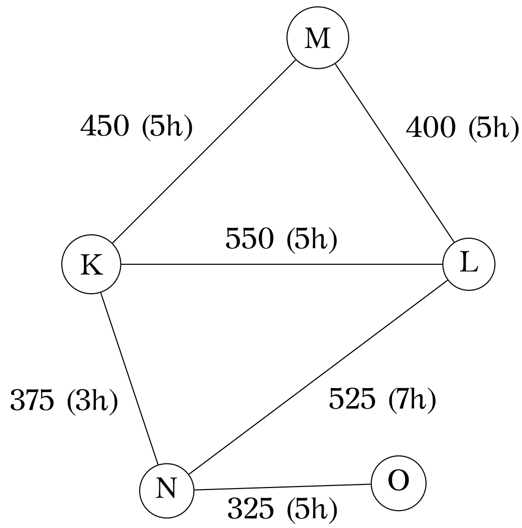
$\mathcal{C}_1$, cercle de centre K et de rayon 5, a pour équation cartésienne : $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 5^2$.
$\mathcal{C}_2$, cercle de centre M et de rayon 6, a pour équation cartésienne : $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 6^2$.

$$\begin{aligned}O \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 &\iff \begin{cases}(x-1)^2 + (y-5)^2 = 5^2\\ (x-4)^2 + (y-8)^2 = 6^2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 + \cancel{25} = \cancel{25} & (e_1)\\ x^2 + y^2 - 8x - 16y + 16 + 64 = 36 & (e_2)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e_1) - (e_2) &\iff 6x + 6y - 15 - 64 = -36\\ &\iff 6x + 6y = 43\\ &\iff \boxed{y = \frac{43}{6} - x}\end{aligned}$$

Question 15 : FVVV

Réalisons un graphe de la situation pondére par les distances et les temps de parcours entre chaque ville. On utlise pour cela la formule $v = \frac{d}{t} \iff t = \frac{d}{v}$.



Affirmation A : Faux

Le trajet K⟶M⟶L⟶N⟶O⟶N⟶K est celui qui permet de visiter chaque ville en minimisant la distance à parcourir qui est alors de : $450 + 400 + 525 + 325 + 325 + 375 = 2\,400$ km.

Affirmation B : Vrai

Sur le parcours précédent, le temps de parcours est alors de 30h.

Affirmation C : Vrai

Sur l'ensemble du parcours, la vitesse moyenne est alors :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{2400}{30} = \boxed{80 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

Affirmation D : Vrai

Sa vitesse moyenne sur le tronçon LN est maintenant de $1{,}4 \times 75 = 105$ km/h et le temps de parcours sur ce tronçon est réduit à $t = \frac{d}{v} = \frac{525}{105} = 5$h. Il met donc 2h de moins et son temps total de parcours sera donc bien de $30 - 2 = 28$h.

➠ Question 16 : VVFV

✏ **Affirmation A : Vrai**

Le trajet K⟶M⟶L⟶K en train représente 1400 km et il faut acheter 3 billets de train au départ de chaque ville K, M et L. Le coût est donc de :

$$\begin{aligned} 3\times 10+0{,}05\times 1400 &= 30+5\times 10^{-2}\times 14\times 10^{2} \\ &= 30+5\times 14 \\ &= \boxed{100\,€} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation B : Vrai**

La voiture consomme 6 litres aux 100 km et le trajet précédent exigerait donc $\dfrac{1400}{100}\times 6=84$ litres d'essence à 1 € le litre soit un coût de 84 €. Le voyage en train coûte donc plus cher qu'en voiture.

✏ **Affirmation C : Faux**

On cherche le coût x au kilomètre en train à partir duquel le voyage en train revient moins cher que celui en voiture c'est-à-dire tel que :

$$\begin{aligned} 30+1400x<84 &\iff x<\frac{54}{1400} \\ &\iff x<\frac{54}{14\times 10^{-2}} \\ &\iff x<\frac{27}{7}\times 10^{2}\simeq 0{,}039 \end{aligned}$$

Tant que le prix au kilomètre parcouru en train sera supérieur à 0,039 €, le voyage en train coûtera plus cher que celui en voiture.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Le coût en train est : $3u+1400v$.
Le coût en voiture est : $14w$.
Le train est au même coût que la voiture si et seulement si :

$$\begin{aligned} 3u+1400v=14w &\iff w=\frac{3u+1400v}{14} \\ &\iff \boxed{w=\frac{3}{14}u+100v} \end{aligned}$$

➽ Question 17 : FVFV

✏ **Affirmation A : Faux**

Sur le tronçon KM, la consommation moyenne est de $f(90) = \dfrac{90}{20} + 1 = 5{,}5$ litres au 100 km.
La consommation totale est donc de $450 \div 100 \times 5{,}5 = 24{,}75$ litres.

✏ **Affirmation B : Vrai**

Tronçon	Distance en km	Conso. moyenne en litre au 100 km	Conso. totale en litre
KL	550	$f(110) = 6{,}5$	$550 \div 100 \times 6{,}5 = 35,75$
LM	400	$f(80) = 5$	$400 \div 100 \times 5 = 20$
MK	450	$f(90) = 5{,}5$	24,75

Soit une commation totale de 80,5 litres.

✏ **Affirmation C : Faux**

S'il roulait à 130 km/h sur le tronçon KL, la consommation moyenne sur ce tronçon serait de $f(130) = 7{,}5$ litres au 100 km et la consommation totale serait alors de $550 \times 7{,}5 = 41{,}25$ litres soit $41{,}25 - 35{,}75 = 5{,}5$ litres de carburant supplémentaires.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Á 110 km/h, le temps de parcours est de $550 \div 110 = 5$h soit un coût de 25 € pour l'employeur et le coût du carburant représente 35,75 € puisque le carburant est à 1 € le litre. Le côut total est donc de 60,75 €.
Á 130 km/h, le temps de parcours est réduit à $550 \div 130 \simeq 4{,}2$h soit un coût de $5 \times 4{,}2 = 21$ € pour l'employeur mais le coût du carburant représente alors 41,25 €. Soit un côut total d'environ 62,25 €.

➠ Question 18 : VFVV

✏ Affirmation A : Vrai

Sur le tronçon KM, la consommation moyenne est maintenant de

$$\begin{aligned} g(90) &= \frac{90^2}{600} - \frac{90}{12} \\ &= \frac{(9\times 10)^2}{600} - \frac{84+6}{12} \\ &= \frac{9^2 \times \cancel{10^2}}{6\times \cancel{100}} - \frac{84}{12} - \frac{6}{12} \\ &= \frac{81}{6} - 7{,}5 \\ &= 13{,}5 - 7{,}5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

La consommation totale est donc de $450 \div 100 \times 6 = 27$ litres.

✏ Affirmation B : Faux

Tronçon	Distance en km	Conso. moyenne en litre au 100 km	Conso. totale en litre
KL	550	$g(110) = 11$	$550 \div 100 \times 11 = 60{,}5$
LM	400	$g(80) = 4$	$400 \div 100 \times 4 = 16$
MK	450	$g(90) = 6$	27

Soit une commation totale de 103,5 litres.

✏ Affirmation C : Vrai

Á 0,7 € le litre de gazole, le coût total est de $103{,}5 \times 0{,}7 = 72{,}45$ €. Dans la situation précédente, le coût du véhicule essence pour le voyage était de 80,5 €. Donc le véhicule roulant au gazole revient effectivement moins cher.

✏ Affirmation D : Vrai

On cherche à savoir pour quelle valeur x de la vitesse moyenne, la consommation moyenne du nouveau véhicule est inférieure à la commation moyenne du véhicule essence c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} g(x) < f(x) &\iff \frac{x^2}{600} - \frac{x}{12} - \frac{x}{20} - 1 < 0 \\ &\iff x^2 - 50x - 30x - 600 < 0 \\ &\iff x^2 - 80x - 600 < 0 \quad \text{(i)} \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de $P(x) = x^2 - 80x - 600$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 80^2 - 4\times 1 \times (-600) \\ &= 6400 + 2400 \\ &= 8800 \end{aligned}$$

On a alors les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{80 - 93{,}8}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{80 + 93{,}8}{2} = \frac{173{,}8}{2} \simeq 87$$

On peut alors établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (i) est donc $]x_1\,;x_2[$ et on conclut que tant que le conducteur ne dépassera pas 87 km/h et donc 86 km/h, $g(x)$ sera inférieure à $f(x)$ et le nouveau véhicule consommera moins de litres de carburant que l'ancien.