mathete.net

Concours ACCÈS 2014

Corrigé détaillé de l'épreuve de **Raisonnement Logique & Mathématiques**

Réponses aux questions

Partie 1 - Raisonnement logique

➠ Question 1 : VVVV

Cherchons le benéfice par produit :

- Si les glaces achetées 3 UM sont revendues 4 UM alors le bénéfice par glace est de 1 UM ;
- Si les popcorns achetés 2,5 UM sont revendus 5 UM alors le benefice par popcorns est de 2,5 UM.

Si le gérant anticipe le beau temps ou le mauvais temps alors il n'y a pas d'invendus et le bénéfice est le suivant :

- S'il fait beau : $200 \times 1 + 150 \times 2{,}5 = 575$ UM
- S'il fait mauvais :$150 \times 1 + 250 \times 2{,}5 = 775$ UM

Si le gérant n'anticipe pas le temps alors il y a des invendus et le bénéfice est le suivant :

- S'il fait beau mais qu'il pensait qu'il ferait mauvais, il vend les 150 glaces achetées mais ne vend que 150 popcorns et a 100 popcorns invendus sur lesquels il ne réalise aucun bénéfice mais qu'il a tout de même acheté 2,5 UM pièce donc son bénéfice est :

$$150 \times 1 + 150 \times 2{,}5 - 100 \times 2{,}5 = 275 \text{ UM}$$

- S'il fait mauvais mais qu'il pensait qu'il ferait beau, il vend 150 popcorns mais ne vend que 150 glaces et a 50 glaces invendues achetées 3 UM pièce donc son bénéfice est :

$$150 \times 1 + 150 \times 2{,}5 - 50 \times 3 = 375 \text{ UM}$$

✏ Affirmation A : Vrai

Le bénéfice maximal est obtenu par jour de mauvais temps anticipé et il est de 775 UM.

✏ Affirmation B : Vrai

D'après les calculs, le gérant réalise toujours un bénéfice positif.

✏ Affirmation C : Vrai

Effectivement, lorsque le dimanche est beau mais que le gérant a prévu du mauvais temps, le bénéfice est minimal égal à 275 UM.

✏ Affirmation D : Vrai

Si le gérant se contente d'acheter tous les samedis 150 glaces et 150 popcorns alors quelque soit le temps, il vend tout son stock et le bénéfice est alors de : $150 \times 1 + 150 \times 2{,}5 = 525$ UM.

➽ Question 2 : FVVF

On note x le prix du premier article, y le prix du second, alors :

- un grossiste achère 2 articles pour un total de 114 € signifie $x + y = 114$
- il les revend à un détaillant en faisant une marge de 25% sur le premier article et de 30% sur le second donc le détaillant dépense une somme de $1{,}25x + 1{,}3y$
- ce détaillant les met en vente en faisant une marge de 20 € sur le premier article et de 15 € sur le second, le prix affiché au client est donc de : $(1{,}25x + 20) + (1{,}3y + 15)$
- finalement, le client achète les deux articles au même prix en ayant eu une réduction de 20% sur le prix du premier article, on peut donc former l'équation : $0{,}8(1{,}25x + 20) = (1{,}3y + 15)$

Il vient le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y = 114 \\ 0{,}8(1{,}25x + 20) = (1{,}3y + 15) \end{cases}
&\iff \begin{cases} x + y = 114 \\ \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{5}{4}x + 20\right) = \dfrac{13}{10}y + 15 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 114 \\ \dfrac{\cancel{4} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{4}}x + \dfrac{4 \times 4 \times \cancel{5}}{\cancel{5}} = \dfrac{13}{10}y + 15 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 114 - x \\ x + 16 = \dfrac{13}{10}(114 - x) + 15 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 114 - x \\ x + \dfrac{13}{10}x = \dfrac{13 \times 57 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 5} + 15 - 16 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 114 - x \\ \dfrac{23}{10}x = \dfrac{741}{5} - 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 114 - x \\ x = \dfrac{736}{5} \times \dfrac{10}{23} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 114 - x \\ x = \dfrac{32 \times \cancel{23} \times 2 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{23}} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 50 \\ x = 64 \end{cases}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation A : Faux

Le grossiste a acheté le premier article 64 € et le second 50 €.

✏ **Affirmation B : Vrai**

Le grossiste a revendu les deux articles au détaillant au prix de :

$$\begin{aligned} 1{,}25\times 64+1{,}3\times 50 &= \frac{5}{\cancel{4}}\times 16\times\cancel{4}+\frac{13}{\cancel{2}\times\cancel{5}}\times\cancel{2}\times\cancel{5}\times 5 \\ &= 80+65 \\ &= 145 \end{aligned}$$

La marge du grossiste est donc de $145-114=31$ €.

✏ **Affirmation C : Vrai**

Le client a acheté les articles au même prix c'est à dire à :

$$\begin{aligned} 1{,}3\times 50+15 &= 65+15 \\ &= 80\text{ € pièce} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation D : Faux**

Le détaillant a acheté les articles au grossiste à 145 € et les a revendu au client pour $2\times 80=160$ €. Il a donc réalisé une marge de $160-145=15$ €.

➠ Question 3 : FVVF

✏ Affirmation A : Faux

Dans l'idéal, pour respecter son timing, il doit parcourir $2x$ km en 6 h, soit une vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours de $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{2x}{6} = \dfrac{x}{3}$ km/h.

✏ Affirmation B : Vrai

Pour respecter son timing, il doit rouler à une vitesse constante de $\frac{x}{3}$ km/h. Si sa vitesse moyenne a été top faible de 2 km/h, cela signifie qu'il a roulé à l'aller à $\frac{x}{3} - 2$ km/h et que son temps de parcours est donc $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{x}{\frac{x}{3} - 2}$ h.

✏ Affirmation C : Vrai

Son temps de parcours à l'aller étant de $\dfrac{x}{\frac{x}{3} - 2}$ h et son temps total de 6h, on déduit que le temps au retour est de $6 - \dfrac{x}{\frac{x}{3} - 2}$ h, soit une vitesse moyenne au retour de $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{x}{6 - \frac{x}{\frac{x}{3}-2}}$

✏ Affirmation D : Faux

Pour respecter son timing et avec les contraintes imposées, ses vitesses moyennes sont :

$$v_{\text{aller}} = \frac{x}{\frac{x}{\frac{x}{3}-2}} \qquad \text{et} \qquad v_{\text{retour}} = \frac{x}{6 - \frac{x}{\frac{x}{3}-2}}$$

Sa vitesse moyenne au retour est donc supérieure à celle de l'aller de :

$$\begin{aligned}
\Delta &= v_{\text{retour}} - v_{\text{aller}} \\
&= v_{\text{retour}} - \frac{x}{\frac{x}{\frac{x}{3}-2}} \\
&= v_{\text{retour}} - \frac{x}{\frac{x}{\frac{x-6}{3}}} \\
&= v_{\text{retour}} - \frac{x}{\frac{3x}{x-6}} \\
&= v_{\text{retour}} - \frac{x(x-6)}{3x} \\
&= v_{\text{retour}} - \frac{x-6}{3} \\
&= \boxed{\frac{x}{6 - \frac{x}{\frac{x}{3}-2}} - \left(\frac{x}{3} - 2\right) \text{ km/h}}
\end{aligned}$$

Question 4 : FFFV

C'est une question dans laquelle il faut envisager tous les scénarios possibles et vérifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- X : « Aucun de nous est innocent » qui signifie que tous sont coupables ;
- Y : « Je suis innocent » ;
- Z : « Au moins deux d'entre nous sont des coupables ».

Pour cela, on construit un tableau dans lequel on indique si la personne ment ou dit la vérité, deux situations peuvent se présenter :

- soit la personne ment alors qu'elle est innocente ou dit la vérité alors qu'elle est coupable et le scénario est donc impossible ;
- soit la personne ment alors qu'elle est coupable ou dit la vérité alors qu'elle est innocente et le scénario est donc possible.

Scénario 1 : On suppose qu'ils sont **tous coupables** et par conséquent **ils doivent tous mentir**. Les affirmations de chacun permettent de déduire si chaque personne ment ou dit la vérité :

- X : « Nous sommes tous coupables » → **il dit vrai** par rapport à notre supposition ;
- Y : « Je suis innocent » → **il ment** par rapport à notre supposition ;
- Z : « Au moins deux d'entre nous sont des coupables » → **il dit vrai** par rapport à notre supposition.

Ce scénario entre en contradiction avec notre supposition qui définissait X, Y et Z comme des menteurs.

Scénario 2 : **X coupable** donc **X doit mentir** et **Y et Z doivent dire la vérité** : impossible.

X	Y	Z
Ment	Dit vrai	Ment

Scénario 3 : **Y coupable** donc **Y doit mentir** et **X et Z doivent dire la vérité** : impossible.

X	Y	Z
Ment	Ment	Ment

Scénario 4 : **Z coupable** donc **Z doit mentir** et **X et Y doivent dire la vérité** : impossible.

X	Y	Z
Ment	Dit vrai	Ment

Scénario 5 : **X et Y coupables** donc **X et Y doivent mentir** et **Z doit dire la vérité** : c'est le bon scénario.

X	Y	Z
Ment	Ment	Dit vrai

On peut envisager les autres scénarios mais seul celui dans lequel X et Y sont coupables et Z est innocent est compatible avec les affirmations de chacun. On peut alors répondre à chaque affirmation.

➠ Question 5 : FFVF

Jean et Mathieu doivent classer chacun exactement N dossiers en 30 jours selon les méthodes suivantes :

- Jean début le premier jour et classe a dossiers par jour pendant 30 jours donc $\boxed{N = 30a}$;
- Mathieu commence le classement « quand après-demain sera hier ». Si le stage débute le lundi 1er alors il commence le classement le jeudi car aprés-demain par rapport à lundi est mercredi et mercredi est bien hier pour jeudi.

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Á partir de ce jeudi 4, il classe b dossiers par jour pendant 9 jours (de J4 à V12). Puis à partir de S13 jusqu'à D21, il classe $2b$ dossiers par jour puis de L22 jusqu'à M30, il classe $4b$ dossiers par jour. On a donc $9 \times b + 9 \times 2b + 9 \times 4b = N \implies \boxed{N = 63b}$.

✏ Affirmation A : Faux

$$\begin{cases} N = 30a \\ N = 63b \end{cases} \implies 30a = 63b \implies \boxed{a = \frac{63}{30}b}$$

✏ Affirmation B : Faux

$$N = 1260 \implies 63b = 1260 \implies b = \frac{2 \times \cancel{63} \times 10}{\cancel{63}} \implies \boxed{b = 20}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$$b = 40 \implies a = \frac{63}{30} \times 40 \implies a = \frac{3 \times \cancel{3} \times 7 \times 4 \times \cancel{10}}{\cancel{3} \times \cancel{10}} \implies \boxed{a = 84}$$

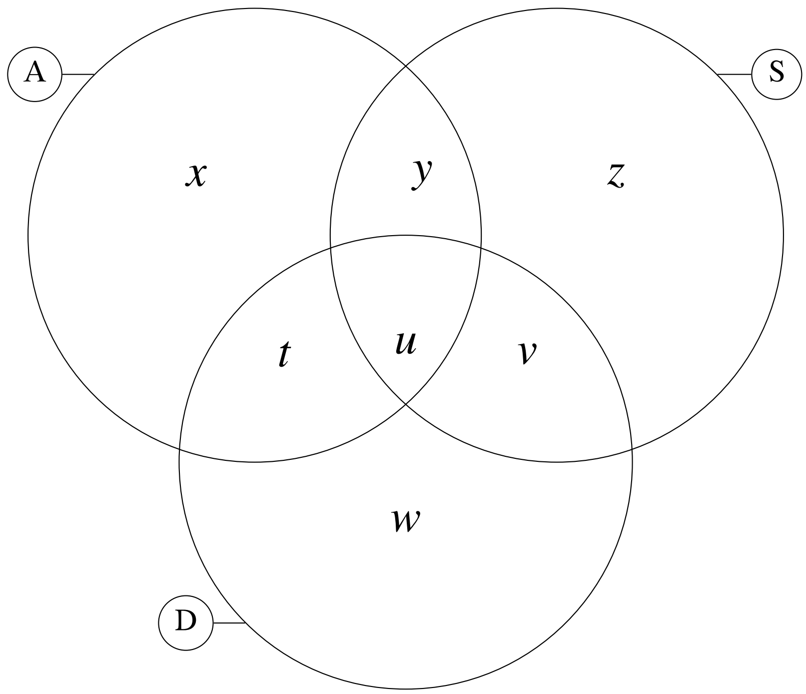
✏ Affirmation D : Faux

Du jeudi 4 inclus au mardi 30 inclus, Mathieu a réalisé son classement en exactement 27 jours.

➽ Question 6 : VVVF

On note :
- A l'ensemble des étudiants pratiquant l'anglais ;
- S l'ensemble de ceux pratiquant l'espagnol ;
- D l'ensemble de ceux pratiquant l'allemand ;

On construit alors le diagramme suivant dans lequel chaque inconnue représente le nombre d'étudiants possédant uniquement la propriété de l'ensemble auquel il appartient. Par exemple, x représente le nombre d'étudiants pratiquant l'anglais et pas l'espagnol ni l'allemand.



Traduisons maintenant chaque information de l'énoncé en une équation :
- 160 étudiants pratiquent l'anglais signifie $x+y+u+t=160$;
- 120 étudiants pratiquent l'espagnol signifie $y+u+v+z=120$;
- 60 étudiants pratiquent l'allemand signifie $t+u+v+w=60$;
- il y a 200 étudiants dans l'école donc $x+y+z+t+u+v+w=200$.

✏ Affirmation A : Vrai

Si 30 étudiants pratiquent les trois langues, on a $u=30$ et on cherche à savoir si $y+t+v=80$ à partir du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y+t & = & 130 & (e_1) \\ y+v+z & = & 90 & (e_2) \\ t+v+w & = & 30 & (e_3) \\ x+y+z+t+v+w & = & 170 & (e_4) \end{array}\right.$$

On peut former par combinaison les nouvelles équations suivantes :

$(e_1)+(e_2)+(e_3) \implies x+z+w+2y+2t+2v=250 \quad (e_5)$

$(e_4)-(e_1) \implies z+v+w=40$

$(e_4)-(e_2) \implies x+t+w=80$

$(e_4)-(e_3) \implies x+y+z=140$
Puis par addition de ces trois nouvelles équations, on obtient :
$2x+2z+2w+y+t+v=260 \quad (e_6)$
Il vient alors en combinant $2\times(e_5)-(e_6)$:
$3y+3t+3v=260 \implies 3(y+t+v)=260 \implies \boxed{y+t+v=80}$

✏ **Affirmation B : Vrai**

Si 60 étudiants pratiquent seulement une langue, on a $x+z+w=60$ et on cherche à savoir si $u=0$.

$$\begin{cases} x+y+t+u &= 160 \quad (e_1) \\ y+v+z+u &= 120 \quad (e_2) \\ t+v+w+u &= 60 \quad (e_3) \\ x+y+z+t+u+v+w &= 200 \quad (e_4) \end{cases}$$

$(e_4)-(e_1) \implies z+v+w=40$
$(e_4)-(e_2) \implies x+t+w=80$
$(e_4)-(e_3) \implies x+y+z=140$
On obtient alors par addition de ces trois nouvelles équations :
$2(x+z+w)+y+t+v=260 \implies y+t+v=260-2\times 60 \implies y+t+v=140$
En remplaçant dans (e_4), on a : $\boxed{u=0}$.

✏ **Affirmation C : Vrai**

On a montré dans l'affirmation précédente que :
$y+t+v=260-2\times(x+z+w)$
Si on suppose que le nombre d'étudiants pratiquant une seule langue est supérieur à 130, on a : $x+z+w>130 \implies y+t+v<0$: ce qui est impossible donc le nombre d'étudiants pratiquant une seule langue est inférieure ou égale à 130.

✏ **Affirmation D : Faux**

Plus de 180 étudiants pratiquent au moins l'une des deux langues : allemand ou espagnol signifie :
$y+z+t+u+v+w>180 \implies x<200-180 \implies x<20$
Or $x+y+u+t=160$ donc $y+u+t>160-20 \implies y+u+t>140$
Donc $z+v+w>40$ mais $z+v+w=40$ (d'après un résultat montré dans l'affirmation B), ce qui mène à une contradiction.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

➠ Question 7 : VVVF

✏ Affirmation A : Vrai

Supposons que $a = 1$ et $b = 1$ alors :

$$\begin{aligned}\forall x \neq 2, f(x) &= x + \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{x(x-2)+1}{x-2} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{x-2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x-2} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}(x-1)^2 = 1 \\ &\lim_{x\to 2^-} x-2 = 0^-\end{aligned}\right\}\text{donc par quotient, } \boxed{\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}(x-1)^2 = 1 \\ &\lim_{x\to 2^+} x-2 = 0^+\end{aligned}\right\}\text{donc par quotient, } \boxed{\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty}$$

Par conséquent, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

✏ Affirmation C : Vrai

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Par conséquent, C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ en $\pm\infty$.

✏ Affirmation D : Faux

Pour étudier la position relative de C_f par rapport la droite d'équation $y = x$, il faut étudier le signe de :

$$f(x) - x = \frac{1}{x-2}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	‖	$+$	

Pour tout $x \in]-\infty\,;2[$, $f(x) - x < 0$ donc C_f est strictement en-dessous de la droite d'équation $y = x$.

Pour tout $x \in]2\,;+\infty[$, $f(x) - x > 0$ donc C_f est strictement au-dessus de la droite d'équation $y = x$.

➠ Question 8 : VFVV

✏ Affirmation A : Vrai

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{2x\mathrm{e}^{x\ln 2} + x^2 \ln 2\mathrm{e}^{x\ln 2}}{(\mathrm{e}^{x\ln 2})^2} \\
&= \frac{2x \times 2^x - 2^x \times x^2 \ln 2}{(2^x)^2} \\
&= \frac{\cancel{2^x} \times x(2 - x\ln 2)}{2^x \times \cancel{2^x}} \\
&= \boxed{\frac{x(2 - x\ln 2)}{2^x}}
\end{aligned}
$$

✏ Affirmation B : Faux

x	0		$\frac{2}{\ln 2}$		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$2 - x\ln 2$		$+$	0	$-$	
$2 - x\ln 2$		$+$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$	$\searrow$	

Sur $[0\,;+\infty[$, f admet un maximum lorsque $x = \dfrac{2}{\ln 2}$.

✏ Affirmation C : Vrai

On rappelle que : $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x\ln 2}} = \mathrm{e}^{-x\ln 2}$.

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \left(\frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right)\mathrm{e}^{-x\ln 2} + (-\ln 2 \times \mathrm{e}^{-x\ln 2}\left(\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x\ln 2}\left(\frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} - \frac{\ln 2 \times x^2}{\ln 2} - \frac{\ln 2 \times 2x}{(\ln 2)^2} - \frac{\ln 2 \times 2}{(\ln 2)^3}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x\ln 2}\left(\frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} - x^2 - \frac{2x}{\ln 2} - \frac{2}{(\ln 2)^2}\right) \\
&= \boxed{-x^2\mathrm{e}^{-x\ln 2}}
\end{aligned}
$$

✏ Affirmation D : Vrai

$$h'(x) = \frac{-x^2}{\mathrm{e}^{x\ln 2}} = -f(x) \implies f(x) = -h'(x) \implies F(x) = -h(x)$$

➠ Question 9 : VFVV

✏ Affirmation A : Vrai

$$A(0\,;6) \in C_g \iff g(0) = 6$$

$g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite (AB) donc :

$$g'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-6}{4-0} = -\frac{3}{2}$$

✏ Affirmation B : Faux

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = a \times \frac{-(\mathrm{e}^{bx}+1)'}{(\mathrm{e}^{bx}+1)^2} = \boxed{-a\frac{b\mathrm{e}^{bx}}{(\mathrm{e}^{bx}+1)^2}}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned} g(0) = 6 &\iff \frac{a}{\mathrm{e}^0+1} = 6 \\ &\iff \frac{a}{2} = 6 \\ &\iff \boxed{a = 12} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g'(0) = -\frac{3}{2} &\iff -\frac{ab\mathrm{e}^0}{(\mathrm{e}^0+1)^2} = -\frac{3}{2} \\ &\iff -\frac{12b}{4} = -\frac{3}{2} \\ &\iff -3b = -\frac{3}{2} \\ &\iff \boxed{b = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{a}{\mathrm{e}^{bx}+1} = \mathrm{e}^{bx} - 1 \\ &\iff (\mathrm{e}^{bx}-1)(\mathrm{e}^{bx}+1) = a \\ &\iff \mathrm{e}^{2bx} - 1 = a \qquad \text{car } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ &\iff \mathrm{e}^{2bx} = a + 1 \\ &\iff 2bx = \ln(a+1) \\ &\iff \boxed{x = \frac{\ln(a+1)}{2b}} \end{aligned}$$

➽ Question 10 : VVVV

✏ Affirmation A : Vrai

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff e^{\frac{1}{2}x} - 1 = \frac{12}{e^{\frac{1}{2}x}+1} \\ &\iff (e^{\frac{1}{2}x} - 1)(e^{\frac{1}{2}x} + 1) = 12 \\ &\iff (e^{\frac{1}{2}x})^2 - 1^2 = 12 \\ &\iff e^{2\times\frac{1}{2}x} - 1 = 12 \\ &\iff e^x = 13 \\ &\iff x = \boxed{\ln 13 = p} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned} f(p) &= f(\ln 13) \\ &= e^{\frac{1}{2}\times\ln 13} - 1 \\ &= e^{\ln\sqrt{13}} \quad \text{car } \tfrac{1}{2}\ln a = \ln\sqrt{a} - 1 \\ &= \boxed{\sqrt{13} - 1 = n} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 13} (e^{\frac{1}{2}x} - 1)\mathrm{d}x &= \left[2e^{\frac{1}{2}x} - x\right]_0^{\ln 13} \\ &= (2e^{\frac{1}{2}\ln 13} - \ln 13) - (2e^0 - 0) \\ &= 2e^{\ln\sqrt{13}} - \ln 13 - 2 \\ &= \boxed{2\sqrt{13} - \ln 13 - 2} \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

$$\begin{aligned} R &= np - \int_0^p (e^{\frac{1}{2}x} - 1)\mathrm{d}x \\ &= (\sqrt{13} - 1)\ln 13 - (2\sqrt{13} - \ln 13 - 2) \\ &= \sqrt{13}\ln 13 - \cancel{\ln 13} - 2\sqrt{13} + \cancel{\ln 13} + 2 \\ &= \boxed{\sqrt{13}\ln 13 - 2\sqrt{13} + 2} \end{aligned}$$

➠ Question 11 : VFVF

On pose :

- a le nombres de cadres ingénieurs embauchés sous contrat A ;
- b le nombres de cadres ingénieurs embauchés sous contrat B ;
- N le nombre d'heures de travail distribuées par l'entreprise ;
- S la masse salariale par semaine de l'entreprise.

L'énoncé définit alors le système de contraintes suivant :

1) $a \leqslant 8$ et $b \leqslant 15$

2) $N = 35a + 20b \geqslant 370$

3) $S = 550a + 220b \leqslant 5060$

Quelque soit l'affirmation on note que la contrainte **1)** est toujours vérifiée. Il faut donc s'attarder à vérifier les deux autres. **ATTENTION** à la formulation des affirmations : « l'entreprise **ne peut pas** embaucher ».

✏ Affirmation A : Vrai

$35 \times 7 + 20 \times 7 = 245 + 100 = 385 \geqslant 370$
$550 \times 7 + 220 \times 7 = 3850 + 1540 = 5390 > 5060$
La contrainte **3)** n'est pas vérifiée donc l'entreprise **ne peut pas** réaliser ce type d'embauches et par conséquent l'affirmation est vraie.

✏ Affirmation B : Faux

$35 \times 4 + 20 \times 12 = 140 + 240 = 380 \geqslant 370$
$550 \times 4 + 220 \times 12 = 2200 + 2640 = 4840 \leqslant 5060$
Toutes les contraintes sont vérifiées donc l'entreprise **peut** réaliser ce type d'embauches et par conséquent l'affirmation est fausse.

✏ Affirmation C : Vrai

$35 \times 2 + 20 \times 14 = 70 + 280 = 350 < 370$
Contrainte **2)** non vérifiée.

✏ Affirmation D : Faux

$35 \times 6 + 20 \times 8 = 210 + 160 = 370 \geqslant 370$
$550 \times 6 + 220 \times 8 = 3300 + 1760 = 5060 \leqslant 5060$
Toutes les contraintes sont vérifiées.

➽ Question 12 : VVVV

✏ **Affirmation A : Vrai**

$$f(2x) = \frac{\ln 2x}{\ln 10} = \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln 10} = \frac{\ln 2}{\ln 10} + \frac{\ln x}{\ln 10} = f(2) + f(x)$$

✏ **Affirmation B : Vrai**

$$f(2^n) = \frac{\ln 2^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 2}{\ln 10} = n\frac{\ln 2}{\ln 10} = nf(2)$$

✏ **Affirmation C : Vrai**

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 10} = \frac{-\ln 2}{\ln 10} = -f(2)$$

✏ **Affirmation D : Vrai**

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} &\iff y = \frac{\ln x}{\ln 10} \\ &\iff y \ln 10 = \ln x \\ &\iff x = \mathrm{e}^{y \ln 10} \\ &\iff x = \mathrm{e}^{\ln 10^y} \\ &\iff f^{-1}(y) = 10^y \end{aligned}$$

Partie 3 - Problème mathématique

➽ Question 13 : VVVV

Les bénéfices mensuels réalisés selon les modèles sont les suivants :

- M_1 : $2 \times 200 = 400$ € ;
- M_2 et M_3 : $2 \times 250 = 500$ € ;
- $M_{\text{louée}}$: $2 \times 220 = 440$ €.

✏ Affirmation A : Vrai

- M_1 génère $400 \times 6 = 2400$ € de bénéfice net sur 6 mois ;
- M_3 prend le relais en générant $500 \times 60 = 30000$ € sur 60 mois, somme à laquelle on doit retirer le coût de la machine soit un bénéfice net de $30000 - 12900 = 17100$ €.

Le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de la période d'amortissement de M_3 est donc de $2400 + 17100 = 19500$ €.

✏ Affirmation B : Vrai

- M_1 génère $400 \times 2 = 800$ € de bénéfice net sur 2 mois ;
- $M_{\text{louée}}$ génère $440 \times 4 = 1760$ € de bénéfice sur 4 mois, somme à laquelle on doit retirer le coût de location de la machine qui est de 500 € par mois soit un bénéfice net de $1760 - 4 \times 500 = -240$ €. ;
- M_3 prend ensuite le relais en générant $500 \times 60 = 30000$ € sur 60 mois, somme à laquelle on doit retirer le coût de la machine soit un bénéfice net de $30000 - 12900 = 17100$ €.

Le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de la période d'amortissement de M_3 est donc de $800 - 240 + 17100 = 17660$ €.

✏ Affirmation C : Vrai

- M_1 génère $400 \times 3 = 1200$ € de bénéfice net sur 3 mois ;
- $M_{\text{louée}}$ génère $440 \times 3 = 1320$ € de bénéfice sur 3 mois, somme à laquelle on doit retirer le coût de location de la machine qui est de 500 € par mois soit un bénéfice net de $1320 - 3 \times 500 = -180$ €. ;
- M_3 prend ensuite le relais en générant $500 \times 60 = 30000$ € sur 60 mois, somme à laquelle on doit retirer le coût de la machine soit un bénéfice net de $30000 - 12900 = 17100$ €.

Le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de la période d'amortissement de M_3 est donc de $1200 - 180 + 17100 = 18120$ €.

✏ Affirmation D : Vrai

Le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de la période d'amortissement de M_2 est de $500 \times 66 - 14000 = 19000$ €.

➽ Question 14 : VFVV

Un amortissement linéaire d'une somme de S € amortie sur t mois signifie que chaque mois, on amortit la somme de $\dfrac{S}{t}$ €.

✏ Affirmation A : Vrai

Si l'entreprise achète M_3 alors elle amortit chaque mois la somme de :

$$\frac{12900}{60} = \frac{1290}{6} = \frac{645}{3} = 215\,€$$

Au bout de 30 mois, il reste donc à amortir la somme de :

$$12900 - 30 \times 215 = 12900 - 30 \times \frac{645}{3} = 12900 - 10 \times 645 = 6450\,€$$

✏ Affirmation B : Faux

Si l'entreprise achète M_2 alors elle amortit chaque mois la somme de :

$$\frac{14000}{66} = \frac{7000}{33}\,€$$

Au bout de 33 mois, il reste donc à amortir la somme de :

$$14000 - \cancel{33} \times \frac{7000}{\cancel{33}} = 7000\,€$$

Somme qui n'est pas strictement supérieure à 7000 €.

✏ Affirmation C : Vrai

x mois après l'achat, il reste à amortir avec M_2 la somme de :

$$14000 - \frac{14000}{66}x = 14000\left(1 - \frac{x}{66}\right)\,€$$

✏ Affirmation D : Vrai

y mois après l'achat, il reste à amortir avec M_3 la somme de :

$$12900 - \frac{12900}{60}y = 12900\left(1 - \frac{y}{60}\right)\,€$$

➠ Question 15 : VVFF

✏ Affirmation A : Vrai

La question 13 a permis de commencer à envisager différents scénarios possibles qu'il convient de compléter :

- Si M_1 résiste jusqu'à l'arrivée de $M_3 \longrightarrow$ bénéfice : 19500 € ;
- Si M_1 résiste 2 mois alors on utilise $M_{\text{louée}}$ pendant 4 mois avant l'arrivée de $M_3 \longrightarrow$ bénéfice : $400 \times 2 + (440 \times 4 - 500 \times 4) + (500 \times 30 - 12900) = 17660$ € ;
- Si M_1 résiste 3 mois alors on utilise $M_{\text{louée}}$ pendant 3 mois avant l'arrivée de $M_3 \longrightarrow$ bénéfice : $400 \times 3 + (440 \times 3 - 500 \times 3) + (500 \times 30 - 12900) = 18120$ € ;
- Si M_1 résiste 4 mois alors on utilise $M_{\text{louée}}$ pendant 2 mois avant l'arrivée de $M_3 \longrightarrow$ bénéfice : $400 \times 4 + (440 \times 2 - 500 \times 2) + (500 \times 30 - 12900) = 18580$ € ;
- Si M_1 résiste 5 mois alors on utilise $M_{\text{louée}}$ pendant 1 mois avant l'arrivée de $M_3 \longrightarrow$ bénéfice : $400 \times 5 + (440 \times 1 - 500 \times 1) + (500 \times 30 - 12900) = 19040$ € ;

Il y a bien 5 valeurs possibles du bénéfice.

✏ Affirmation B : Vrai

D'après les calculs précédents, les valeurs possibles du bénéfice sont bien compris entre 17660 et 19500 €.

✏ Affirmation C : Faux

D'après les données de l'énoncé, la probabilité que M_1 résiste jusqu'à l'arrivée de M_3 est de 0,4 et il y a des chances égales qu'elle tombe en panne au cours du 3[ième], 4[ième], 5[ième] ou 6[ième] mois soit $\frac{1-0,4}{6} = 0,15$, d'où le tableau de probabilité suivant :

x_i	17660	18120	18580	19040	19500
p_i	0,15	0,15	0,15	0,15	0,4

La probabilité p_i associée à la plus petite valeur de x_i est donc 0,15.

✏ Affirmation D : Faux

Calculons l'espérance mathématique E associée à la loi de probabilité précédente :

$$\begin{aligned}
E &= 17660 \times 0,15 + 18120 \times 0,15 + 18580 \times 0,15 + 19040 \times 0,15 + 19500 \times 0,4 \\
&= 0,15 \times (17660 + 19040 + 18120 + 18580) + 4 \times 1950 \\
&= 0,15 \times (36700 + 36700) + 4 \times (2000 - 50) \\
&= 0,15 \times 2 \times 36700 + 8000 - 200 \\
&= 0,3 \times 36700 + 7800 \\
&= 3 \times 3670 + 7800 \\
&= 11010 + 7800 \\
&= \boxed{18810}
\end{aligned}$$

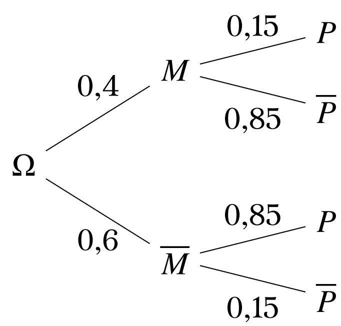
Le bénéfice espéré est donc égal à 18810 €.

➽ Question 16 : VVVF

Soit les événement suivants :

- M : « La machine M_1 résiste jusqu'à l'arrivée de M_3 » ;
- P : « L'expert dit que M_1 tombe en panne ».

On peut alors construire l'arbre de probabilité suivant :



L'expert prédit avec un taux de réussite de 85% que la machine va résister signifie que si la machine résiste alors la probabilité qu'elle ne tombe pas en panne (c'est-à-dire que sa prédiction soit juste) est de 0,85 soit $p_M(\overline{P}) = 0{,}85$. De même, l'expert prédit avec un taux de réussite de 85% que la machine va tomber en panne signifie que si la machine tombe en panne alors la probabilité qu'elle tombe réellement en panne (c'est-à-dire que sa prédiction soit juste) est de 0,85 soit $p_{\overline{M}}(P) = 0{,}85$.

✏ Affirmation A : Vrai

$$\begin{aligned} p(P) &= p(M \cap P) + p(\overline{M} \cap P) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}15 + 0{,}6 \times 0{,}85 \\ &= 0{,}06 + 0{,}51 \\ &= \boxed{0{,}57} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

D'après notre arbre, on lit directement $p_M(P) = 0{,}15$.

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned} p_{\overline{P}}(M) &= \frac{p(\overline{P} \cap M)}{p(\overline{P})} \\ &= \frac{0{,}4 \times 0{,}85}{1 - 0{,}57} \\ &= \frac{0{,}32}{0{,}43} \\ &= \frac{320 \times 10^{-3}}{43 \times 10^{-2}} \simeq 0{,}7 > 0{,}6 \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

La probabilité que M_1 tombe en panne au cours du $3^{\text{ième}}$ mois est 0,15 d'après question 15.

➽ Question 17 : VFVF

✏ Affirmation A : Vrai

Si l'entreprise vend q produits au prix de p€ alors la recette est $R(q) = qp$.

Or $q - M + 2p = 0 \iff p = \dfrac{M-q}{2}$ donc :

$$\begin{aligned} R(q) &= qp \\ &= q \times \frac{M-q}{2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}Mq} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Faux

$R'(q) = -q + \dfrac{1}{2}M$.

q	0		$\frac{M}{2}$		$+\infty$
$R'(q)$		$+$	0	$-$	
R		↗	$R(\frac{M}{2})$	↘	

La recette mensuelle est donc maximale pour un volume de production de $\frac{M}{2}$ unités.

✏ Affirmation C : Vrai

Le coût total de production de q unités s'obtient à partir du coût moyen $C(q)$ selon la formule :

$$\begin{aligned} C_T(q) &= qC(q) \\ &= q\left(q^2 - 8q + 57 + \frac{2}{q}\right) \\ &= \boxed{q^3 - 8q^2 + 57q + 2} \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

Le profit mensuel est :

$$\begin{aligned} G(q) &= R(q) - C_T(q) \\ &= \left(-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}Mq\right) - (q^3 - 8q^2 + 57q + 2) \\ &= \boxed{-q^3 + \frac{15}{2}q^2 + \left(\frac{M}{2} - 57\right)q - 2} \end{aligned}$$

➠ Question 18 : VVFF

L'énoncé définit un système de contraintes à poser :
① $x \geqslant 4\,000$
② $y \geqslant 5\,000$
③ $6x + 9y \geqslant 36\,000$: concerne les matières premières
④ $2x + y \leqslant 20\,000$: concerne la main d'oeuvre

✏ Affirmation A : Vrai

D'après ③, on a d'une part :

$$\begin{aligned} 36\,000 \leqslant 6x + 9y &\iff 4\,000 \leqslant \frac{2}{3}x + y \quad \textit{(en divisant chaque membre par 9)} \\ &\iff 4\,000 - \frac{2}{3}x \leqslant y \end{aligned}$$

D'après ④, on a d'autre part :

$$2x + y \leqslant 20\,000 \iff y \leqslant 20\,000 - 2x \leqslant 20\,000 \quad \textit{(car } x > 0\textit{)}$$

On a donc bien : $\boxed{4\,000 - \frac{2}{3}x \leqslant y \leqslant 20\,000}$

✏ Affirmation B : Vrai

Le calcul du coût total lié au transport doit tenir compte :

- de l'acheminement de $(6x + 9y)$ kg de matières premières de l'usine principale vers l'unité de production ;
- du retour de $(3x + 4y)$ kg de produit fini de puis l'unité de production vers l'usine principale.

Le prix de ce transport étant estimé à 4€ par kg, on obtient un coût total $C(x, y)$ lié au transport de :

$$\begin{aligned} C(x, y) &= 4 \times ((6x + 9y) + (3x + 4y)) \\ &= 4(9x + 13y) \\ &= \boxed{36x + 52y} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Faux

Si $x = 7\,000$ et $y = 7\,000$ alors ① et ② sont vérifiées. De plus :
③ $6 \times 7\,000 + 9 \times 7\,000 = 105\,000 \geqslant 36\,000$: vérifiée.
④ $2 \times 7\,000 + 7\,000 = 21\,000 > 20\,000$: non vérifiée.

✏ Affirmation D : Faux

$C(5\,000, 6\,000) = 36 \times 5\,000 + 52 \times 6\,000 = 492\,000$ € (avec contraintes vérifiées)
Or $C(4\,000, 5\,000) = 36 \times 4\,000 + 52 \times 5\,000 = 404\,000$ € (avec contraintes vérifiées)
Donc si l'on produit 4 000 unités de A et 5 000 unités de B, les contraintes sont vérifiées et le coût est plus faible que pour 5 000 unités de A et 6 000 unités de B produites.