mathete.net

Concours ACCÈS 2013

Corrigé détaillé de l'épreuve de **Raisonnement Logique & Mathématiques**

Réponses aux questions

Partie 1 - Raisonnement logique

Question 1 : FVVV 2
Question 2 : VVVF 4
Question 3 : VVVF 6
Question 4 : FFVF 8
Question 5 : VFFV 9
Question 6 : VFFF 10

Partie 2 - Raisonnement mathématique

Question 7 : FVFV 12
Question 8 : VVFF 13
Question 9 : FVVV 15
Question 10 : VVFV 17
Question 11 : FVVF 18
Question 12 : FVFF 19

Partie 3 - Problème mathématique

Question 13 : VVVF 21
Question 14 : VVFF 22
Question 15 : VFVF 24
Question 16 : FFFV 25
Question 17 : FFFV 26
Question 18 : VVFV 27

Partie 1 - Raisonnement logique

Question 1 : FVVV

C'est une question dans laquelle il faut envisager les différents scénarios possibles et vérifier s'il y a alors une contradiction avec les informations de l'énoncé. Il ne sert évidemment à rien de considérer tous les scénarios possibles une fois qu'on a trouvé le bon. On le fait ici simplement pour s'entraîner. On note :

- X : « Xavier » ;
- Y : « Yves » ;
- Z : « Zoran » ;
- F : « Directeur du service financier » ;
- M : « Directeur du service marketing » ;
- RH : « Directeur du service des ressources humaines » ;

Situation ① : possible.

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow M \\ Y \longrightarrow RH \\ Z \longrightarrow F \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Nom	Enfants à charge	Niveau d'ancienneté
X	oui	
Y		plus ancien que X
Z	0	le moins ancien

Situation ② : impossible.

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow M \\ Y \longrightarrow F \\ Z \longrightarrow RH \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Nom	Enfants à charge	Niveau d'ancienneté
X	oui	
Y	non	plus ancien que X mais moins ancien de l'entreprise
Z		

Situation ③ : impossible.

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow RH \\ Y \longrightarrow M \\ Z \longrightarrow F \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Nom	Enfants à charge	Niveau d'ancienneté
X	oui	
Y		plus ancien que lui-même
Z	non	moins ancien

Situation ④ : impossible.

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow RH \\ Y \longrightarrow F \\ Z \longrightarrow M \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Nom	Enfants à charge	Niveau d'ancienneté
X	oui	
Y	non	plus ancien que Z mais moins ancien de l'entreprise
Z		

Situation ⑤ : impossible.

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow F \\ Y \longrightarrow RH \\ Z \longrightarrow M \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Nom	Enfants à charge	Niveau d'ancienneté
X	oui et non	moins ancien de l'entreprise
Y		plus ancien que Z
Z		

Situation ⑥ : impossible.

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow F \\ Y \longrightarrow M \\ Z \longrightarrow RH \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Nom	Enfants à charge	Niveau d'ancienneté
X	oui et non	moins ancien de l'entreprise
Y		plus ancien que lui-même
Z		

➽ Question 2 : VVVF

✏ **Affirmation A : Vrai**

Soit u_n le montant annuel payé l'année de rang n avec le contrat n°1. Si on considère une augmentation de $\alpha\%$ du loyer annuel alors on définit une suite géométrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 &=& 12 \times 2\,000 = 24\,000 \\ u_{n+1} &=& (1+\alpha)u_n \end{array}\right.$$

Les formules sur les suites géométriques permettent de conclure :

$$\begin{array}{rcl} u_n &=& u_p \times Q^{n-p} \\ u_n &=& u_1(1+\alpha)^{n-1} \end{array}$$

✏ **Affirmation B : Vrai**

Soit w_n le montant annuel payé l'année de rang n avec le contrat n°3. Si on considère une augmentation de $\beta\%$ du loyer semestriellement alors c'est comme si annuellement le loyer est multiplié par $(1+\beta)\times(1+\beta) = (1+\beta)^2$.On définit encore une suite géométrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_1 &=& 12 \times 3\,000 = 36\,000 \\ w_{n+1} &=& (1+\beta)^2 w_n \end{array}\right.$$

Les formules sur les suites géométriques permettent de conclure :

$$w_n = w_1((1+\beta)^2)^{n-1} = w_1(1+\beta)^{2n-2}$$

✏ **Affirmation C : Vrai**

Soit v_n le montant annuel payé l'année de rang n avec le contrat n°2. Si on considère une augmentation de $b = 4\,000$ € du loyer annuel alors on définit une suite arithmétique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1 &=& a = 41\,000 \\ v_{n+1} &=& v_n + 4\,000 \end{array}\right.$$

Les formules sur les suites géométriques permettent de conclure :

$$\begin{array}{rcl} v_n &=& u_p + (n-p)\times R \\ v_n &=& v_1 + (n-1)\times b \\ v_n &=& a + (n-1)b \end{array}$$

✏ **Affirmation D : Faux**

On cherche à savoir pour quelle valeur de n on a :

$$\begin{aligned}
u_n = w_n &\iff u_1(1+\alpha)^{n-1} = w_1(1+\beta)^{2n-2} \\
&\iff \ln(u_1(1+\alpha)^{n-1}) = \ln(w_1(1+\beta)^{2n-2}) \\
&\iff \ln u_1 + \ln(1+\alpha)^{n-1} = \ln w_1 + \ln(1+\beta)^{2n-2} \\
&\iff \ln(1+\alpha)^{n-1} - \ln((1+\beta)^2)^{n-1} = \ln w_1 - \ln u_1 \\
&\iff (n-1)\ln(1+\alpha) - (n-1)\ln(1+\beta)^2 = \ln w_1 - \ln u_1 \\
&\iff (n-1)\left[\ln(1+\alpha) - 2\ln(1+\beta)\right] = \ln w_1 - \ln u_1 \\
&\iff \boxed{n = \frac{\ln w_1 - \ln u_1}{\ln(1+\alpha) - 2\ln(1+\beta)} + 1}
\end{aligned}$$

Question 3 : VVVF

Les informations de l'énoncé permettent de dresser le tableau suivant dans lequel on lit la ligne avant la colonne :

	X	Y	Z
X		Gagne	Perd
Y	Perd		Nul
Z	Gagne	Nul	

- X a gagné contre Y ;
- X a perdu contre Z ;
- Y a perdu contre X ;
- Y a fait match nul contre Z ;
- Z a gagné contre X ;
- Z a fait match nul contre Y.

Comment a-t-on rempli ce tableau ?
La ligne des matchs de Y se rempli en priorité grâce aux données fournies par le tableau de l'énoncé et on suppose que c'est contre X que Y a perdu et contre Z qu'elle a fait match nul. Ce qui donne :

	X	Y	Z
X			
Y	**Perd**		**Nul**
Z			

$\Longrightarrow$

	X	Y	Z
X		**Gagne**	
Y	Perd		Nul
Z		**Nul**	

D'après le tableau de l'énoncé, X a perdu un match. Dans notre situation, on déduit que c'est forcément contre Z. D'où :

	X	Y	Z
X		Gagne	**Perd**
Y	Perd		Nul
Z	**Gagne**	Nul	

On pourrait envisager une autre situation dans laquelle Y a fait match nul contre X et a perdu contre Z, ce qui donnerait :

	X	Y	Z
X			
Y	**Nul**		**Perd**
Z			

$\Longrightarrow$

	X	Y	Z
X		**Nul**	
Y	Nul		Perd
Z		**Gagne**	

X ayant perdu un match. Dans cette situation, ce serait encore forcément contre Z, d'où :

	X	Y	Z
X		Nul	**Perd**
Y	Nul		Perd
Z	**Gagne**	Gagne	

Cette situation n'est pas envisageable. En effet, le tableau de l'énoncé nous indique que X a marqué 3 buts et n'en a encaissé que 2. Or si elle a fait un match nul (disons 2-2) alors elle a forcément gagné son deuxième match (1-0 dans notre exemple) : ce qui contredit notre situation.

Nous allons maintenant chercher à déduire les résultats de chaque match :

On sait que Y n'a pas mis de buts sur l'ensemble de ses matchs, donc :

Y **0** - ? Z
X ? - **0** Y
X ? - ? Z

Y a fait match nul contre Z donc :

Y 0 - **0** Z
X ? - 0 Y
X ? - ? Z

Z n'a encaissé qu'un seul but et c'est donc forcément contre X d'où :

Y 0 - 0 Z
X ? - 0 Y
X **1** - ? Z

X a marqué 3 buts en tout donc forcément 2 contre Y :

Y 0 - 0 Z
X **2** - 0 Y
X 1 - ? Z

X a encaissé 2 buts en tout donc c'est forcément contre Z :

Y 0 - 0 Z
X 2 - 0 Y
X 1 - **2** Z

On peut donc compléter le tableau de l'énoncé de la manière suivante et répondre à toutes les affirmations :

Équipe	Matchs gagnés	Matchs perdus	Matchs nuls	Buts marqués	Buts encaissés
X	1	1	0	3	2
Y	0	1	1	0	**2**
Z	1	0	1	**2**	1

➠ Question 4 : FFVF

Je pars, j'ai en poche x€, et je donne à la 1ère personne $\frac{x}{2}+1$€, il me reste $x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-1$€
Je donne à la deuxième personne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)+2 &= \frac{x}{4}-\frac{1}{2}+2\\ &= \frac{x}{4}+\frac{3}{2}\text{€}\end{aligned}$$

Il me reste :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{2}\right) &= \frac{2x-x}{4}-\frac{5}{2}\\ &= \frac{x-10}{4}\text{€}\end{aligned}$$

Je donne à la troisième personne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\frac{x-10}{4}+3 &= \frac{x-10}{8}+\frac{24}{8}\\ &= \frac{x+14}{8}\text{€}\end{aligned}$$

Il me reste 1 € donc je peux déterminer la somme x que j'avais au départ :

$$\begin{aligned}\frac{x-10}{4}-\frac{x+14}{8}=1 &\iff \frac{2x-20}{8}-\frac{x+14}{8}=\frac{8}{8}\\ &\iff 2x-20-(x+14)=8\\ &\iff x-34=8\\ &\iff x=42\text{€}\end{aligned}$$

✏ Affirmation A : Faux

J'ai donné au premier : $\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$€

✏ Affirmation B : Faux

Après avoir donné au second, il me restait : $\frac{x-10}{4}$€

✏ Affirmation C : Vrai

J'ai effectivement donné au troisième la somme de : $\frac{x+14}{8}$€

✏ Affirmation D : Faux

Attention de ne pas répondre trop vite. 42€ est la somme que j'avais au départ. Or, il me reste à la fin 1€, j'ai donc distribué 41€.

➠ Question 5 : VFFV

Réalisons un tableau des effectifs à partir des données de l'énoncé.

		YEUX			
		Brun	Noir	Bleu	Total
CHEVEUX	Blond	$42-20-12=$ **10**	$72-60=$ **12**	20	42
	Noir	$50-10=$ **40**	60		$x-42$
	Total	50	72	$x-122$	x

✏ **Affirmation A : Vrai**

Il y a 40 étudiants qui ont les yeux bruns et les cheveux noirs, ce qui représente une proportion de $\dfrac{40}{x}$ de la population totale. L'énoncé mentionne en revanche un pourcentage et non une proportion et pourtant le tableau des réponses officiel mentionne que l'affirmation est vrai !

✏ **Affirmation B : Faux**

Il y a $x-122$ étudiants qui ont les yeux bleus.

✏ **Affirmation C : Faux**

$10+12+20+40+60=142$ donc le groupe est composé d'au moins 142 étudiants.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Il y a 42 étudiants avec des cheveux blonds et au moins 100 étudiants avec des cheveux noirs donc il y a effectivement plus d'étudiants avec des cheveux noirs que des cheveux blonds.

➽ Question 6 : VFFF

Soit N_h et N_f respectivement le nombre d'hommes et de femmes de l'entreprise, d'où :

$$N_h + N_f = 3\,000$$

La masse salariale M de l'entreprise s'obtient de deux manières différentes.

- soit en effectuant le produit du salaire moyen par le nombre total de salarié :

$$M = 2\,000 \times 3\,000 = 6 \times 10^6$$

- soit en additionnant la masse salariale des hommes (chaque homme gagne 3000 € en moyenne) et la masse salariale des femmes (chaque femme gagne en moyenne 1500 €) :

$$M = 3\,000N_h + 1\,500N_f$$

Il vient alors le système suivant :

$$\begin{cases} N_h + N_f = 3\,000 \\ 3\,000N_h + 1\,500N_f = 6 \times 10^6 \end{cases} \iff \begin{cases} N_f = 3 \times 10^3 - N_h \\ 3 \times 10^3 N_h + 1{,}5 \times 10^3(3 \times 10^3 - N_h) = 6 \times 10^6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} N_f = 3 \times 10^3 - N_h \\ 3 \times 10^3 N_h + 4{,}5 \times 10^6 - 1{,}5 \times 10^3 N_h = 6 \times 10^6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} N_f = 3 \times 10^3 - N_h \\ 1{,}5 \times 10^3 N_h = 6 \times 10^6 - 4{,}5 \times 10^6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} N_f = 3 \times 10^3 - N_h \\ \cancel{1{,}5} \times 10^3 N_h = \cancel{1{,}5} \times 10^6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} N_f = 3 \times 10^3 - N_h \\ N_h = 1\,000 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} N_f = 2\,000 \\ N_h = 1\,000 \end{cases}$$

✏ Affirmation A : Vrai

La proportion d'hommes dans l'entreprise est : $\dfrac{N_h}{N_f + N_h} = \dfrac{1\,000}{2\,000 + 1\,000} = \dfrac{1}{3}$.

✏ Affirmation B : Faux

Rien ne permet de l'affirmer. Le fait que le salaire moyen des hommes soit plus élevé ne signifie pas que c'est un homme qui gagne le plus.

✏ Affirmation C : Faux

La masse salariale des hommes est de : $1\,000 \times 3\,000 = 3\,000\,000$ €.
Si l'on retire un salaire de 10 000 € à cette masse salariale alors le nouveau salaire moyen est de : $\dfrac{2\,990\,000}{1\,000} = 2\,990$ €. Donc le salaire moyen ne devient pas inférieur à 2 990 € mais égal à 2 990 €.

✏ **Affirmation D : Faux**

Les 10% de femmes les moins bien payées gagnent en moyenne 1 000 € signifient que $0{,}1 \times 2\,000 = 200$ femmes dans l'entreprise gagnent en moyenne 1 000 €. Ce qui représente une masse salariale de $200 \times 1000 = 200\,000$ €. La proportion que représente cette masse salariale dans la masse salariale totale se calcule donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{200\,000}{6\,000\,000} &= \frac{2 \times 10^5}{60 \times 10^5} \\ &= \frac{2}{60} \\ &= \frac{1}{3 \times 10^1} \\ &= 0{,}333 \times 10^{-1} \\ &= 0{,}033\,3\end{aligned}$$

Soit environ 3,33%.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

➽ Question 7 : FVFV

✏ Affirmation A : Faux

Soit $f(x) = a + bx\mathrm{e}^{-x}$ alors pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a)' + (bx)'\mathrm{e}^{-x} + (bx)(\mathrm{e}^{-x})' \\ &= b\mathrm{e}^{-x} + bx \times (-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(b - bx) \\ &= \boxed{b(1-x)\mathrm{e}^{-x}} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

D'après l'énoncé, on sait que :

- la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0\,;1)$, ce qui signifie que $f(0) = 1 \iff a + b \times 0 \times \mathrm{e}^0 = 1 \iff \boxed{a = 1}$;
- et en ce point, la tangente à la courbe a comme pente 1, ce qui signifie que $f'(0) = 1 \iff b(1-0)\mathrm{e}^0 = 1 \iff \boxed{b = 1}$.

✏ Affirmation C : Faux

On vient de déterminer que $f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}$ et que $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$. Dressons alors le tableau de variations de la fonction f pour tout x de $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(1-x)$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

f admet un maximum en 1 et ce maximum vaut $f(1) = 1 + 1 \times \mathrm{e}^{-1} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

✏ Affirmation D : Vrai

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$ donc f réalise une bijection de $[-1\,;1]$ sur $[f(-1)\,;f(1)]$. On a par ailleurs $f(-1) = 1 - \mathrm{e} < 0$ et $f(1) = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} > 0$. Donc il existe une unique solution notée α à l'équation $f(x) = 0$, avec $-1 < \alpha < -1$.

x	-1		α		$+1$
f	$1-\mathrm{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$

➽ Question 8 : VVFF

$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$. Les deux premières affirmations consistent à étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

✏ Affirmation A : Vrai

$f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \textit{(croissance comparée)} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{donc par somme, } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Et par conséquent (C) admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

✏ Affirmation B : Vrai

$f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x} = (2\ln x + 1) \times \dfrac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to 0^+} (2\ln x + 1) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par produit, } \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

Et par conséquent (C) admet en une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

✏ Affirmation C : Faux

Calculons la fonction dérivée de f et dressons le tableau de variations de f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\ln x + 1)'(x) - (2\ln x + 1)(x)'}{x^2} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times x - (2\ln x + 1) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2 - 2\ln x - 1}{x^2} \\ &= \boxed{\frac{1 - 2\ln x}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2\ln x = 0 &\iff -2\ln x = -1 \\ &\iff \ln x = \frac{-1}{-2} \\ &\iff \ln x = \frac{1}{2} \\ &\iff e^{\ln x} = e^{\frac{1}{2}} \\ &\iff x = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2\ln x > 0 &\iff -2\ln x > -1 \\ &\iff \ln x < \frac{-1}{-2} \\ &\iff \ln x < \frac{1}{2} \\ &\iff e^{\ln x} < e^{\frac{1}{2}} \\ &\iff x < e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On vient de montrer que $1-2\ln x$ s'annule en $e^{\frac{1}{2}}$ et surtout que $1-2\ln x$ est positif lorsque $x < e^{\frac{1}{2}}$ et négatif sinon. **Attention au changement de sens de l'inégalité lorsque l'on divise par** -2.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$(1-2\ln x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(e^{\frac{1}{2}})$	$\searrow$	0

Donc f est croissante sur $\left]0\,;e^{\frac{1}{2}}\right[$.

✏ **Affirmation D : Faux**

Pour déterminer les coordonnées de (C) avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{2\ln x + 1}{x} = 0 \\ &\iff 2\ln x + 1 = 0 \quad \text{avec } x \neq 0 \\ &\iff \ln x = -\frac{1}{2} \\ &\iff e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{2}} \\ &\iff x = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc (C) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(e^{-\frac{1}{2}}\,;0)$.

➽ Question 9 : FVVV

La courbe $\mathcal{P}$ est la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $\mathcal{D}$ est la représentation graphique d'une fonction affine défine par $g(x) = mx + 5$ avec m réel.

✏ Affirmation A : Faux

$B(2\,;7) \in \mathcal{P}$ signifie que $f(2) = 7 \iff \boxed{4a + 2b + c = 7}$.
De plus $f'(x) = 2ax + b$ et $\mathcal{P}$ a pour maximum le point $B(2\,;7)$, ce qui signifie que la fonction dérivée de f s'annule en changeant de signe en ce point d'où :
$f'(2) = 0 \iff 2a \times 2 + b = 0 \iff \boxed{4a + b = 0}$.

✏ Affirmation B : Vrai

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ se coupent au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$ signifie que $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = g\left(\dfrac{5}{2}\right)$, d'où :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{5}{2}\right) = g\left(\frac{5}{2}\right) &\iff a \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + b \times \left(\frac{5}{2}\right) + c = m \times \left(\frac{5}{2}\right) + 5 \\
&\iff \boxed{\frac{5}{2}m + 5 - \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b - c = 0} \quad (\times 4) \\
&\iff 10m + 20 - 25a - 10b - 4c = 0
\end{aligned}$$

✏ **Affirmation C : Vrai**

$$\begin{cases} 4a+2b+c = 7 \\ 4a+b = 0 \\ 10m+20-25a-10b-4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -4a \\ 4a+2\times -4a+c = 7 \\ 10m+20-25a-10\times -4a-4c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -4a \\ 4a-8a+c = 7 \\ 10m+20-25a+40a-4c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -4a \\ c = 4a+7 \\ 10m+20+15a-4(4a+7) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -4a \\ c = 4a+7 \\ 10m+20+15-16a-28 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -4(10m-8) \\ c = 4(10m-8)+7 \\ a = 10m-8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -8+10m \\ b = 32-40m \\ c = -25+40m \end{cases}$$

✏ **Affirmation D : Vrai**

$$m=-2 \iff \begin{cases} a = -8+10\times(-2) \\ b = 32-40\times(-2) \\ c = -25+40\times(-2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -28 \\ b = 112 \\ c = -105 \end{cases}$$

On a alors $g(x) = -2x+5$ et $f(x) = -28x^2+112x-105$ et :

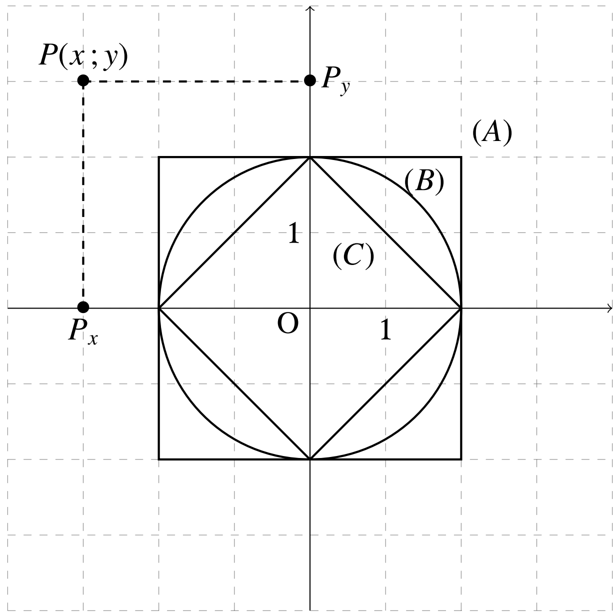
$$g\left(\frac{11}{7}\right) = -2\times\frac{11}{7}+5 = -\frac{22}{7}+\frac{35}{7} = \boxed{\frac{13}{7}}$$

$$f\left(\frac{11}{7}\right) = -28\times\left(\frac{11}{7}\right)^2+112\times\left(\frac{11}{7}\right)-105 = -\frac{4\times\cancel{7}\times 121}{\cancel{7}\times 7} = \frac{-484+112\times 11-105\times 7}{7} = \boxed{\frac{13}{7}}$$

$g\left(\frac{11}{7}\right) = f\left(\frac{11}{7}\right)$ donc les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent bien en un même point d'abscisse $\frac{11}{7}$.

Remarque : Il est nécessaire de poser les calculs pour calculer $f\left(\frac{11}{7}\right)$ rapidement.

➽ Question 10 : VVFV



✏ Affirmation A : Vrai

$|x| = OP_x$ et $|y| = OP_y$. Le point P appartient au carré (A) si $OP_x \leqslant 2$ et $OP_y \leqslant 2$ c'est-à-dire si $|x| \leqslant 2$ et $|y| \leqslant 2$.

✏ Affirmation B : Vrai

P appartient à (B) si $OP \leqslant 2$ c'est-à-dire si $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2$.

✏ Affirmation C : Faux

Si on considère le point $P(3\,;1)$ alors $|1| \leqslant |3| + 2$ est vérifié et pourtant P n'appartient pas à (C).

✏ Affirmation D : Vrai

On note p la probabilité que le point P soit à l'intérieur du cercle (B) sans être à l'intérieur du carré (C) sachant qu'il se trouve à l'intérieur du carré (A) alors :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\text{Aire de B} \;-\; \text{Aire de C}}{\text{Aire de A}} \\ &= \frac{\pi \times 2^2 - (2\sqrt{2})^2}{4^2} \\ &= \frac{4\pi - 8}{16} \\ &= \boxed{\frac{\pi - 2}{4}} \end{aligned}$$

Remarque : La mesure du côté du carré (C) s'obtient avec le théorème de Pythagore :
côté $= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

➽ Question 11 : FVVF

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{100}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} &\iff \ln\left(1-\frac{1}{100}\right)^n \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) && (1)\\
&\iff n\ln\left(1-\frac{1}{100}\right) \leqslant \ln(0{,}5) && (2)\\
&\iff n\ln\left(\frac{99}{100}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) && (3)\\
&\iff n\ln(0{,}99) \leqslant \ln(0{,}5) && (4)\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}99)} && (5)
\end{aligned}$$

✏ Affirmation A : Faux

De l'équation (2), il vient : $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln\left(1-\frac{1}{100}\right)}$.

✏ Affirmation B : Vrai

De l'équation (3), il vient :

$$\begin{aligned}
n\ln\left(\frac{99}{100}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) &\iff n\left(\ln(99)-\ln(100)\right) \leqslant \ln 1 - \ln 2\\
&\iff n \geqslant -\frac{\ln 2}{\ln(99)-\ln(100)}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

Voir l'équation (5).

✏ Affirmation D : Faux

Attention au piège : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \neq \ln(a-b)$.

Remarque : Pour la résolution de l'inéquation, attention au changement de sens de l'inégalité lorsque l'on divise par $\ln(0{,}99)$ qui est négatif.

➽ Question 12 : FVFF

Soit la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3x^2+6x+1}{x+2}$.

✏ Affirmation A : Faux

$f(0) = 3\times 0 + \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$ donc $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\frac{1}{2})$.

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \left(3x + \frac{1}{x+2}\right)dx \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2 + \ln(x+2)\right]_0^2 \\
&= \left(\frac{3}{2}\times 2^2 + \ln(2+2)\right) - \left(\frac{3}{2}\times 0^2 + \ln(0+2)\right) \\
&= 6 + \ln 4 - \ln 2 \\
&= 6 + \ln 2^2 - \ln 2 \\
&= 6 + 2\ln 2 - \ln 2 \\
&= \boxed{6 + \ln 2}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Faux

La droite d'équation $y = 3$ est une droite horizontale donc il est impossible qu'elle soit asymptote verticale.
Nous allons tout de même chercher les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ pour s'entraîner.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0^+
\end{aligned}\right\}\text{donc par somme, } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Et par conséquent il n'y a pas d'asymptotes horizontales.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-2^+} 3x = -6 \\
&\lim_{x\to-2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty
\end{aligned}\right\}\text{donc par somme, } \boxed{\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty}$$

Et par conséquent la droite d'équation $y = -2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

✏ Affirmation D : Faux

Déterminons l'ensemble de définition de $g(x) = \ln\left(\dfrac{3x^2+6x+1}{x+2}\right)$.

Pour cela, on cherche à savoir pour quelles valeurs de x, $g(x)$ existe, c'est-à-dire pour quelles valeurs de x, on a $\dfrac{3x^2+6x+1}{x+2} > 0$. On dresse donc le tableau de signe de $f(x)$.
Résolution de $3x^2+6x+1=0$: $\Delta = 6^2 - 4\times 3\times 1 = 24$.

$x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{24}}{6} = -1 - \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = -1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $x_2 = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

x	-2		x_1		x_2		$+\infty$
$3x^2+6x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]-2\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$.
Par conséquent g n'est pas définie sur l'intervalle $]x_1\,;x_2[$ et elle ne peut donc pas être croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

Partie 3 - Problème mathématique

➽ Question 13 : VVVF

✏ Affirmation A : Vrai

	Article X	Article Y
Quantités produites et vendues	2 000	1 000
Prix de vente unitaire en €	30	20
Chiffres d'affaires réalisés en €	$2\,000 \times 30 = 60\,000$	$1\,000 \times 20 = 20\,000$
Chiffre d'affaire total en €		80 000

✏ Affirmation B : Vrai

Les charges variables de distribution unitaires sont de 10% du prix de vente. Or Y est vendu 20 € l'unité donc les charges unitaires sont de $\dfrac{10}{100} \times 20 = 2$ € et $2 \times 1000 = 2000$ €.

✏ Affirmation C : Vrai

	Article X	Article Y
Quantités produites et vendues	2 000	1 000
Chiffre d'affaire total en €		80 000
Charges variables en €	$2\,000 \times (12+3) = 30\,000$	$1\,000 \times (10+2) = 12\,000$
Charges fixes en €	20 000	
Résultat global €	$80\,000 - 30\,000 - 12\,000 - 20\,000 = 18\,000$	

✏ Affirmation D : Faux

Les charges de distribution unitaires s'élèvent à $t\%$ du prix de vente c'est-à-dire à $\frac{t}{100} \times 30 = 0{,}3t$ pour X et à $0{,}2t$ pour Y. On cherche alors t tel que le résultat B vérifie :

$$\begin{aligned} B \geqslant 22\,800 &\iff 80\,000 - 20\,000 - 2\,000(12 + 0{,}3t) - 1000(10 + 0{,}2t) \geqslant 22\,800 \\ &\iff 26\,000 - 600t - 200t \geqslant 22\,800 \\ &\iff t \leqslant \frac{3200}{800} \\ &\iff t \leqslant 4\% \end{aligned}$$

Les charges de distribution unitaire doivent donc être égal à au plus 4% pour que le résultat soit au moins égal à 22 800 €.

➽ Question 14 : VVFF

✏ Affirmation A : Vrai

	Quantités vendues	Profit réalisés	Temps de production
Article X	x	$30\left(1-\dfrac{x}{6000}\right)x$	$1{,}2x$
Article Y	y	$20\left(1-\dfrac{y}{4000}\right)y$	$2{,}4y$

La capacité de l'atelier étant de 100 heures soit 6 000 minutes, on a :

$$\begin{aligned}
1{,}2x+2{,}4y=6000 &\iff 1{,}2x=6000-2{,}4y\\
&\iff x=\frac{6000}{1{,}2}-\frac{2{,}4}{1{,}2}y\\
&\iff x=\frac{6000}{\frac{12}{10}}-2y\\
&\iff x=\frac{1000\times\cancel{6}\times 10}{2\times\cancel{6}}-2y\\
&\iff \boxed{x=5\,000-2y}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

Le chiffre d'affaires noté CA est donné par :

$$\begin{aligned}
CA &= 30\left(1-\frac{x}{6000}\right)x+20\left(1-\frac{y}{4000}\right)y\\
&= 30x-\frac{30x^2}{600}+20y-\frac{20y^2}{400}\\
&= 30(5000-2y)-\frac{3}{600}(5000-2y)^2+20y-\frac{2}{400}y^2\\
&= 150\,000-60y-\frac{1}{200}((5\times10^3)^2-2\times5\times10^3\times2y+(2y)^2)+20y-\frac{1}{200}y^2\\
&= 150\,000-40y-\frac{1}{2\times10^2}(25\times10^6-2\times10^4y+4y^2)-\frac{1}{2\times10^2}y^2\\
&= 150\,000-40y-\frac{25\times10^6}{2\times10^2}+\frac{2\times10^4}{2\times10^2}y-\frac{4}{2\times10^2}y^2-0{,}5\times10^{-2}y^2\\
&= 150\,000-40y-12{,}5\times10^4+10^2y-2\times10^{-2}y^2-0{,}5\times10^{-2}y^2\\
&= 150\,000-125\,000-40y+100y-2{,}5\times10^{-2}y^2\\
&= \boxed{25\,000+60y-0{,}025y^2}
\end{aligned}$$

✏ **Affirmation C : Faux**

Soit CA la fonction qui à y associe le chiffre d'affaire $CA(y) = 25\,000 + 60y - 0{,}025y^2$, alors $CA'(y) = -0{,}05y + 60$. Cherchons la valeur de y qui annule CA' :

$$\begin{aligned}
-0{,}05y + 60 = 0 &\iff y = \frac{60}{0{,}05} \\
&\iff y = \frac{6 \times 10^1}{5 \times 10^{-2}} \\
&\iff y = 1{,}2 \times 10^3 \\
&\iff y = 1\,200
\end{aligned}$$

Le tableau de variation de la fonction de chiffre d'affaire est alors le suivant :

y		1200	
$CA'(y)$	+	0	−
CA	↗	$CA(1200)$	↘

Le chiffre d'affaire est maximum lorsque $y = 1200$.

✏ **Affirmation D : Faux**

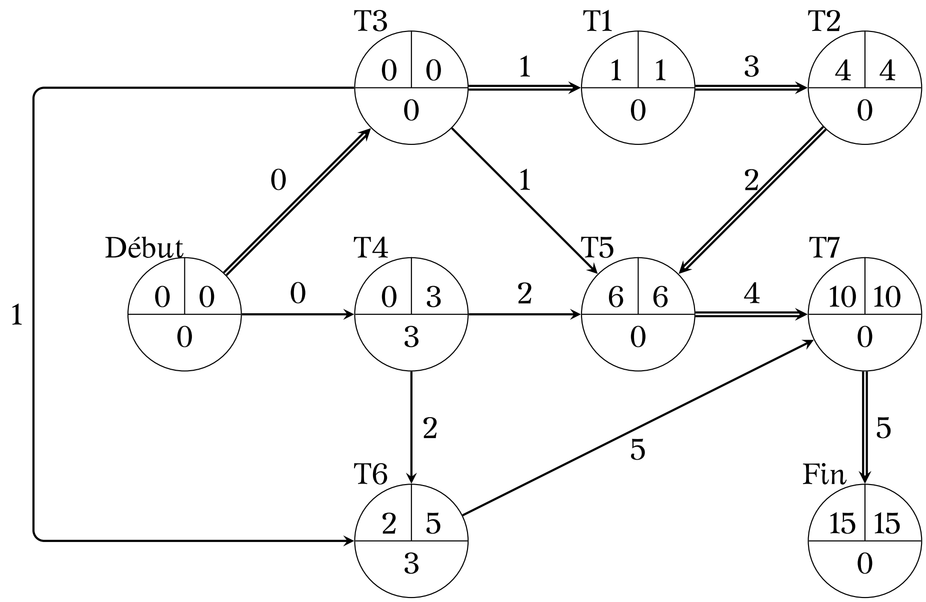
Exprimons y en fonction de x : $x = 5\,000 - 2y \iff y = 2\,500 - 0{,}5x$. On a alors :

$$\begin{aligned}
CA(x) &= -0{,}025(2\,500 - 0{,}5x)^2 + 60(2\,500 - 0{,}5x) + 25\,000 \\
&= -25 \times 10^{-3}((25 \times 10^2)^2 - 2 \times 2\,500 \times 0{,}5x + (5 \times 10^{-1}x)^2) \\
&\quad + 6 \times 10^1 \times 25 \times 10^2 - 6 \times 10^1 \times 5 \times 10^{-1}x + 25 \times 10^3 \\
&= -25 \times 10^{-3}(25^2 \times 10^4 - 25 \times 10^2 x + 25 \times 10^{-2}x^2) \\
&\quad + 150 \times 10^3 - 30 \times 10^0 x + 25 \times 10^3 \\
&= -25^3 \times 10^1 + 25^2 \times 10^{-1}x - 25^2 \times 10^{-5}x^2 + 150\,000 - 30x + 25\,000 \\
&= -25^2 \times 10^{-5}x^2 + 25^2 \times 10^{-1}x - 30x + 175\,000 - 25^3 \times 10^1
\end{aligned}$$

Le calcul est long et fastidieux mais c'est un bon entraînemet pour manipuler des nombres en puissance de 10. On pourra remarquer plus simplement que $CA(x)$ est un polynôme du second degré dont le coefficient en x^2 est négatif, ce qui traduit le fait que la fonction est croissante puis décroissante et qu'elle admet par conséquent un maximum est non un minimum.

➠ Question 15 : VFVF

C'est une question d'ordonnancement de tâches qui nécessite d'établir un diagramme PERT et qui fait appel à des notions hors programme en terminale S et ES. Ce genre de questions n'a plus été posé depuis cette session de 2013.



✏ Affirmation A : Vrai

La marge totale sur T6 est de 3 jours, ce qui signifie que cette tâche peut enregistrer 3 jours de retard sans retarder la date d'achèvement du projet.

✏ Affirmation B : Faux

La marge totale sur T2 est nulle, ce qui signifie que cette tâche ne peut enregistrer aucun jour de retard sans mettre en péril la date d'achèvement du projet. Tout retard enregistré sur cette tâche se répercute sur la date d'achèvement du projet.

✏ Affirmation C : Vrai

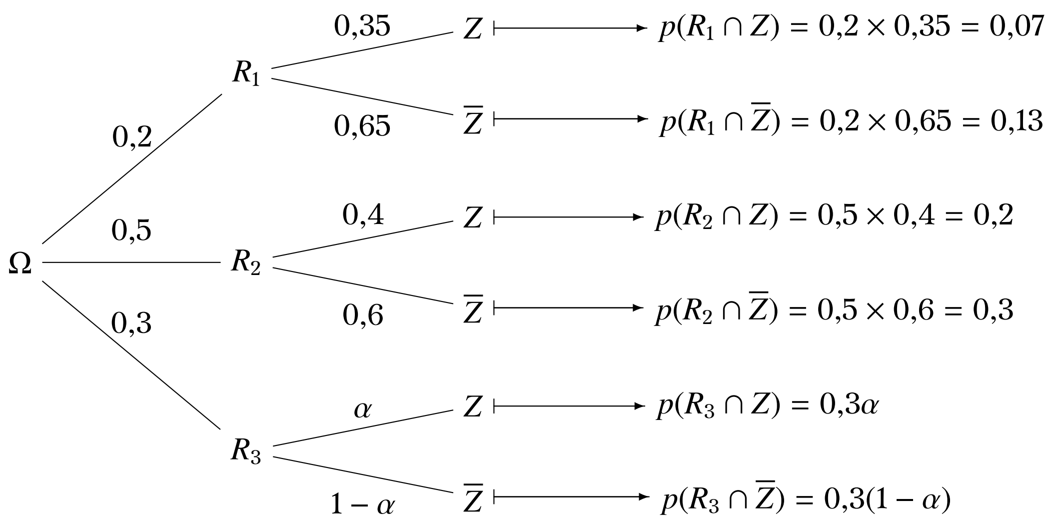
La date de fin du projet est de 15 jours si aucun retard n'est pris dans aucune tâche.

✏ Affirmation D : Faux

La marge totale sur T6 étant de 3 jours, si un retard de 6 jours est enregistré sur cette tâche alors la date d'achèvement du projet sera réellement retardé de $6-3=3$ jours et celui-ci prendra donc fin au bout de $15+3=18$ jours.

➠ Question 16 : FFFV

Soit R_n l'évènement : « la personne interrogée provient de la région n » et Z l'évènement : « la personne interrogée a acheté l'article Z ». On peut alors construire l'arbre de probabilité suivant :



✏ **Affirmation A : Faux**

On sait d'après l'énoncé que 30% des personnes intérrogées ont acheté l'article Z donc $p(Z) = 0{,}3$. On a alors :

$$\begin{aligned}
p(Z) = p(R_1 \cap Z) + p(R_2 \cap Z) + p(R_3 \cap Z) &\iff 0{,}3 = 0{,}07 + 0{,}2 + 0{,}3\alpha \\
&\iff \alpha = \frac{0{,}3 - 0{,}07 - 0{,}2}{0{,}3} \\
&\iff \alpha = \frac{0{,}03}{0{,}3} \\
&\iff \alpha = \frac{\cancel{3} \times 10^{-2}}{\cancel{3} \times 10^{-1}} \\
&\iff \alpha = 10^{-1} = 0{,}1
\end{aligned}$$

✏ **Affirmation B : Faux**

On cherche la probabilié qu'une personne provienne de la région 2 et ait acheté l'article Z, d'où : $p(R_2 \cap Z) = 0{,}2$.

✏ **Affirmation C : Faux**

$$\left.\begin{array}{l} p(R_1 \cap Z) = 0{,}07 \\ p(R_3 \cap Z) = 0{,}3\alpha = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03 \end{array}\right\} \text{Donc } p(R_1 \cap Z) \neq 2p(R_3 \cap Z)$$

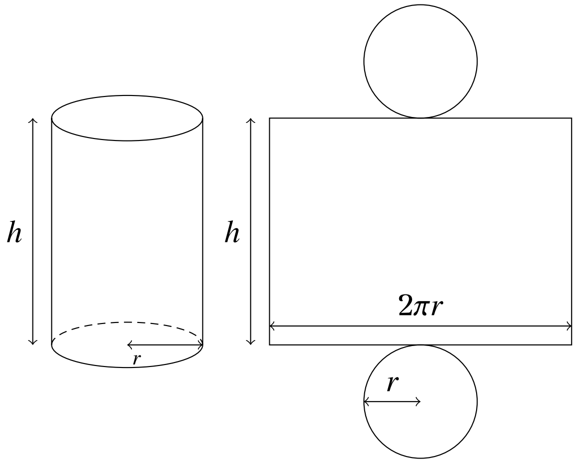
✏ **Affirmation D : Vrai**

$p(R_1 \cap Z) = 0{,}07$

➠ Question 17 : FFFV

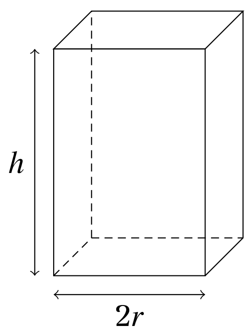
Pour chaque emballage, nous allons chercher :

- la surface de carton nécessaire à l'emballage noté $\mathcal{C}$;
- le volume de mousse nécessaire dans l'emballage noté $\mathcal{M}$.



$$\mathcal{C}_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \boxed{2\pi r(r+h)}$$

$$\mathcal{M}_1 = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \boxed{\frac{2}{3}\pi r^2 h}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= 2\times(2r)^2 + 4\times 2rh\\ &= 2\times 4r^2 + 4\times 2rh\\ &= \boxed{4r(2r+2h)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= 4r^2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h\\ &= \boxed{r^2h\left(4-\frac{\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

✎ Affirmation A : Faux

La surface en carton en m² de l'emballage E_1 est : $\mathcal{C}_1 = 2\pi r(r+h)$

✎ Affirmation B : Faux

La surface en carton en m² de l'emballage E_2 est : $\mathcal{C}_2 = 4r(2r+2h)$

✎ Affirmation C : Faux

Le volume en m³ occupé par la mousse de l'emballage E_1 est : $\mathcal{M}_1 = \dfrac{2}{3}\pi r^2 h$

✎ Affirmation D : Vrai

Le volume en m³ occupé par la mousse de l'emballage E_2 est : $\mathcal{M}_2 = r^2h\left(4-\dfrac{\pi}{3}\right)$

➽ Question 18 : VVFV

✏ Affirmation A : Vrai

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1 + \mathcal{C}_1 \times c_c + \mathcal{M}_1 \times c_m \\ &= f_1 + 2\pi r(r+h)c_c + \frac{2}{3}\pi r^2 h c_m \\ &= \boxed{f_1 + 2\pi r\left[(r+h)c_c + \frac{rh}{3}c_m\right]} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned} p_2 &= f_2 + \mathcal{C}_2 \times c_c + \mathcal{M}_2 \times c_m \\ &= f_2 + 4r(2r+2h)c_c + r^2h\left(4 - \frac{\pi}{3}\right)c_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 &\iff p_1 - 2\pi r\left[(r+h)c_c + \frac{rh}{3}c_m\right] = p_2 - 4r(2r+2h)c_c - r^2h\left(4 - \frac{\pi}{3}\right)c_m \\ &\iff p_1 - p2 = 2\pi r(r+h)c_c + 2\pi r\frac{rh}{3}c_m - 4r(2r+2h)c_c - r^2h\left(4-\frac{\pi}{3}\right)c_m \\ &\iff p_1 - p_2 = c_c(2\pi r^2 + 2\pi rh - 8r^2 - 8rh) + c_m\left(\frac{2}{3}\pi r^2 h - 4r^2h + \frac{1}{3}\pi r^2 h\right) \\ &\iff p_1 - p_2 = c_c(2r^2(\pi-4) + 2rh(\pi-4)) + c_m\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h - 4r^2 h\right) \\ &\iff p_1 - p_2 = \underbrace{c_c}_{+}\underbrace{(\pi-4)}_{-}\underbrace{(2r^2+2rh)}_{+} + \underbrace{c_m}_{+} \times \underbrace{\pi r^2 h}_{+} \times \underbrace{\left(\frac{1}{3} - 4\right)}_{-} \\ &\iff p_1 - p_2 < 0 \\ &\iff p_1 < p2 \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Faux

On pose $h' = 2h$ la hauteur du cône modifié. Le coût de la mousse pour l'emballage E_2 est alors donné par la formule :

$$\begin{aligned} r^2h'\left(4 - \frac{\pi}{3}\right)c_m &= r^2\frac{h}{2}\left(4 - \frac{\pi}{3}\right)c_m \\ &= \frac{1}{2}\left[r^2h\left(4 - \frac{\pi}{3}\right)c_m\right] \end{aligned}$$

Le coût du carton pour l'emballage E_2 est alors donné par la formule :

$$\begin{aligned} 4r(2r+2h')c_c &= 4r\left(2r+2\times\frac{h}{2}\right)c_c \\ &= 4r(2r+h)c_c \\ &\neq \frac{1}{2}\left[4r(2r+2h)c_c\right] \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on divise par 2 la hauteur du cône, alors le coût de la mousse pour l'emballage E_2 est bien divisé par 2 mais ce n'est pas le cas pour le coût du carton.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Soit f_{c1} le coût du carton pour l'emballage E_1 et f_{c2} le coût du carton pour l'emballage E_2. On a alors :

- $f_{c1} = 2\pi r(r+h)c_c$;
- $f_{c2} = 4r(2r+2h)c_c = 8r(r+h)c_c$.

La question qu'on se pose alors est de savoir si $f_{c2} \geqslant 1{,}1 f_{c1} \iff \dfrac{f_{c2}}{f_{c1}} \geqslant 1{,}1$?

Remarque : On va prendre $\pi = \frac{22}{7}$ comme approximation de π.

$$\begin{aligned} \frac{f_{c2}}{f_{c1}} &= \frac{8r(r+h)c_c}{2\pi r(r+h)c_c} \\ &= \frac{4}{\pi} \\ &= \frac{4}{\frac{22}{7}} \\ &= 4\times\frac{7}{22} \\ &= \frac{14}{11} \end{aligned}$$

En posant la division, on trouve que $\frac{14}{11} \simeq 1{,}27$ donc le coût du carton pour l'emballage E_2 est environ 27% plus cher que celui de l'emballage E_1.