Concours ACCÈS 2024

Corrigé de l'épreuve de Raisonnement Logique et Mathématiques

© *Mathieu Pons*
@ contact@mathete.net

Liste des exercices

Partie 1 - Raisonnement logique

Exercice 1 : FVVF 2

Exercice 2 : FFFF 4

Exercice 3 : VFFV 5

Exercice 4 : FFFV 7

Exercice 5 : FVFF 8

Partie 2 - Raisonnement mathématique

Exercice 6 : FVVV 9

Exercice 7 : VVVV 10

Exercice 8 : VVVF 11

Exercice 9 : VVFV 13

Exercice 10 : FFFF 15

Partie 3 - Problème mathématique

Exercice 11 : FVFV 16

Exercice 12 : VFFV 17

Exercice 13 : VFVV 18

Exercice 14 : VFFF 19

Exercice 15 : VFVF 20

Partie 1 - Raisonnement logique

Exercice 1 : FVVF

Il y a dans l'entreprise 6 femmes et 4 hommes. 3 candidats sont titulaires d'un master en marketing et 1 seul et unique candidat est un homme titulaire d'un master finance.
D'où le tableau à double entrée suivant :

	Marketing	Finance	Communication	TOTAL
Homme		1		4
Femme		0		6
TOTAL	3	1	6	10

À partir de là, plusieurs situations sont possibles. Nous allons donc supposer le nombre d'hommes titulaires d'un master marketing et compléter le tableau en fonction de cette supposition.

Situation 1 : aucun homme n'est titulaire d'un master marketing.

	Marketing	Finance	Communication	TOTAL
Homme	0	1	3	4
Femme	3	0	3	6
TOTAL	3	1	6	10

Situation 2 : 1 seul homme est titulaire d'un master marketing.

	Marketing	Finance	Communication	TOTAL
Homme	1	1	2	4
Femme	2	0	4	6
TOTAL	3	1	6	10

Situation 3 : 2 hommes sont titulaires d'un master marketing.

	Marketing	Finance	Communication	TOTAL
Homme	2	1	1	4
Femme	1	0	5	6
TOTAL	3	1	6	10

Situation 4 : 3 hommes sont titulaires d'un master marketing.

	Marketing	Finance	Communication	TOTAL
Homme	3	1	0	4
Femme	0	0	6	6
TOTAL	3	1	6	10

➲ ***Item A :*** *Les trois titulaires d'un master spécialisation marketing sont des hommes.* ***Faux***
Plusieurs situations sont possibles qui n'entraînent pas de contradictions particulières donc on ne peut pas affirmer ceci.

➲ ***Item B :*** *Il y a autant de masters spécialisation marketing chez les femmes que de masters spécialisation communication digitale chez les hommes.* ***Vrai***
Dans les quatre situations envisagées, il y a effectivement à chaque fois le même nombre de masters spécialisation marketing chez les femmes que de masters spécialisation communication digitale chez les hommes.

➲ ***Item C :*** *Le nombre de masters spécialisation communication digitale chez les femmes est au moins égal à 3.* ***Vrai***
Dans les quatre situations envisagées, il y a affectivement au moins trois femmes à chaque fois qui sont titulaires d'un master communication digitale.

➲ ***Item D :*** *Il y a plus de masters spécialisation marketing chez les femmes que chez les hommes.* ***Faux***
Dans la situation 3 et 4, il y a moins de masters spécialisation marketing chez les femmes que chez les hommes.

≡ Exercice 2 : FFFF

Rappelons ce que l'on sait de Julie (J), Maeva (M) et Sabine (S) :

① La plus diplômée entre Julie et Maeva est la plus rémunérée des trois stagiaires.

② La plus rémunérée entre Maeva et Sabine est la plus diplômée des trois stagiaires.

③ La moins diplômée entre Julie et Sabine est la plus rémunérée des trois stagiaires.

④ La stagiaire affectée au service Logistique est moins rémunérée que la stagiaire affectée au service Ressources Humaines.

⑤ La stagiaire affectée au service Informatique est moins diplômée que la stagiaire affectée au service Logistique.

Commençons par chercher l'ordre de la plus diplômée à la moins diplômée.

Par exemple, supposons que ce soit $J > M > S$ ou $J > S > M$, alors d'après ①, J est la plus rémunérée. Or, d'après ③, ce devrait être S la plus rémunérée.
D'où une contradiction qui permet de conclure que Julie n'est pas la plus diplômée.

De même, si l'on suppose $M > J > S$ ou $M > S > J$, alors d'après ①, M est la plus rémunérée mais d'après ③, ce devrait être S ou J, ce qui est impossible.

Considérons alors $S > M > J$. D'après ①, M est la plus rémunérée mais d'après ③, ce devrait être J. Cette situation est donc elle aussi impossible.

Reste à considérer $S > J > M$. D'après ①, J est la plus rémunérée et d'après ③, c'est bien J la plus rémunérée. Donc l'ordre de diplôme, du plus élevé au moins élevé est le suivant : $\boxed{S > J > M}$.

Cherchons maintenant l'ordre de la plus rémunérée à la moins rémunérée sachant que l'on sait déjà que J a le meilleur salaire, reste donc à considérer deux cas : $J > M > S$ ou $J > S > M$.

Supposons $J > M > S$ alors d'après ②, M serait la plus diplômée, ce qui n'est pas le cas, donc c'est une situation impossible.

L'ordre de rémunération correct est donc $\boxed{J > S > M}$. En effet, d'après ②, S doit être la plus diplomée des trois stagiaires, ce qui est bien le cas.

Résumons :

- Ordre pour le diplôme : $S > J > M$
- Ordre pour le salaire : $J > S > M$

Il faut maintenant attribuer un poste à chaque stagiaire :

Logistique	Informatique	Ressources Humaines	*Possible ?*
M	S	J	*Non d'après* ④
M	J	S	*Non d'après* ⑤
S	M	J	*Oui*

On peut maintenant répondre à chaque affirmation.

➋ ***Item A :*** *Julie est moins rémunérée que Sabine.* ***Faux***

➋ ***Item B :*** *Julie est la plus diplômée des trois stagiaires.* ***Faux***

➋ ***Item C :*** *Sabine est affectée au service Informatique.* ***Faux***

➋ ***Item D :*** *Maeva est affectée au service Ressources Humaines.* ***Faux***

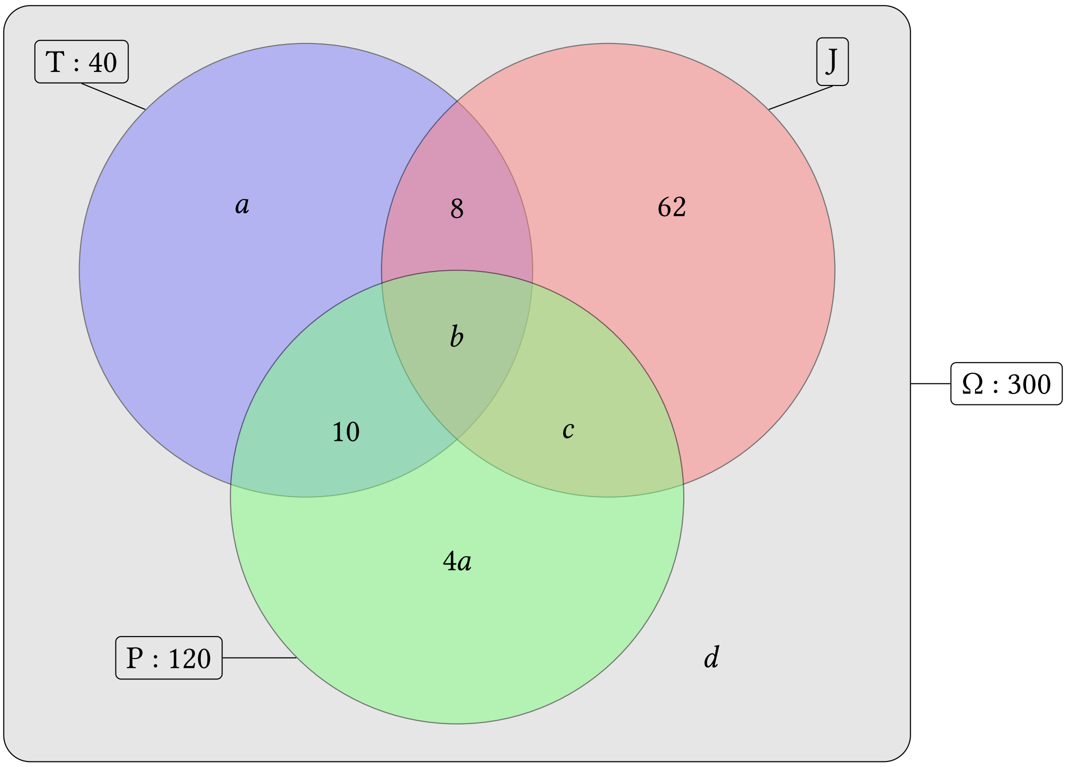
≡ Exercice 3 : VFFV

Construisons un diagramme de Venn. Pour cela, on note :

- T l'ensemble des personnes ayant acheté une tondeuse ;
- J l'ensemble des personnes ayant acheté un salon de jardin ;
- P l'ensemble des personnes ayant acheté un parasol.

Certaines informations peuvent être directement reportées sur le diagramme à condition que l'on reste vigilant sur le vocabulaire :

- 62 ont répondu avoir acheté **uniquement** un salon de jardin, 120 avoir acheté un parasol (et peut-être une tondeuse et/ou un salon de jardin) et 40 avoir acheté une tondeuse (et peut-être un parasol et/ou un salon de jardin).
- Les personnes ayant acheté **uniquement** un parasol sont 4 fois plus nombreuses que celles ayant acheté **uniquement** une tondeuse.
- Parmi les personnes ayant acheté une tondeuse (donc parmi les 40 qui sont dans T), un quart d'entre elles (c'est-à-dire 10) ont également acheté un parasol **mais pas** de salon de jardin.
- 8 personnes ont acheté une tondeuse **et** un salon de jardin **mais pas** de parasol.



Reste une information à exploiter en fonction des inconnues que l'on a posé, à savoir 30 personnes ont à la fois acheté un parasol et un salon de jardin (et peut-être une tondeuse), soit $b + c = 30$.

Il vient le alors système à résoudre :

$$\begin{cases} {\color{red}b + c = 30} \\ a + b + 10 + 8 = 40 \\ 4a + {\color{red}b + c} + 10 = 120 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = 30 \\ a + b + 10 + 8 = 40 \\ 4a + {\color{red}30} + 10 = 120 \end{cases}$$

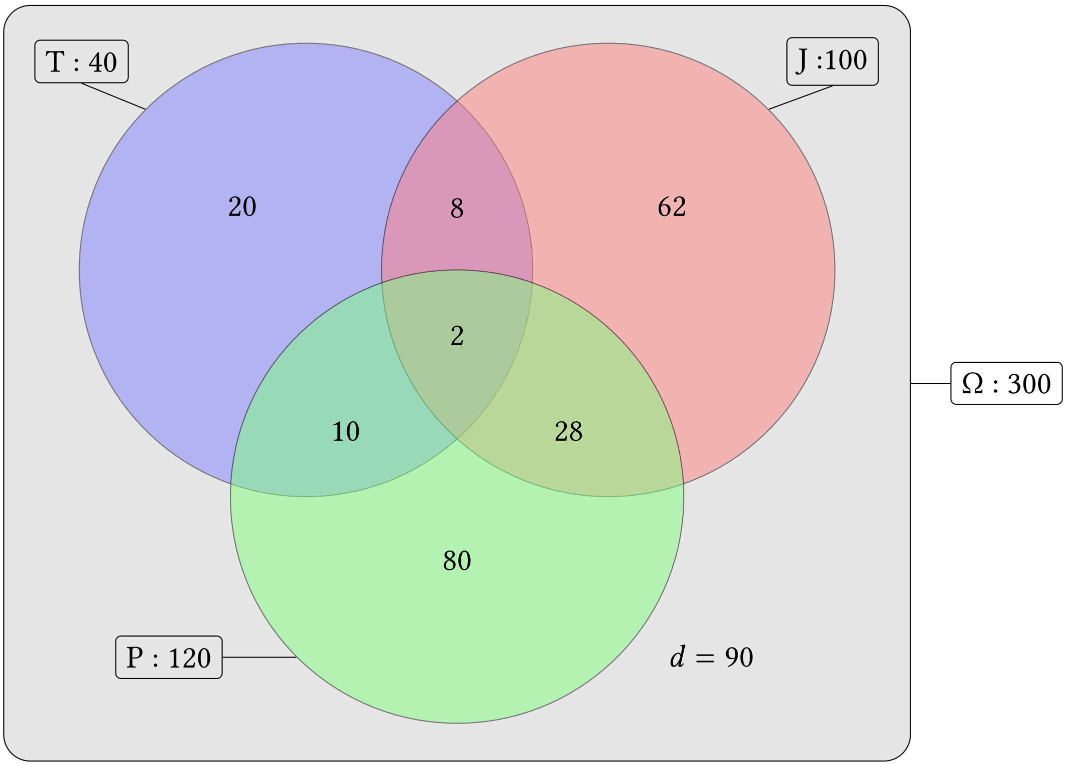
$$\begin{cases} b+c=30 \\ a+b+10+8=40 \\ 4a+\textcolor{red}{30}+10=120 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=30 \\ a+b+10+8=40 \\ a=\dfrac{120-10-30}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b+c=30 \\ \textcolor{red}{a}+b+10+8=40 \\ \textcolor{red}{a}=\textcolor{red}{20} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=30-b \\ b=40-10-8-\textcolor{red}{20} \\ a=20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=30-2=28 \\ b=2 \\ a=20 \end{cases}$$

D'où le diagramme de Venn complété qui permet de répondre à chaque affirmation :



➋ ***Item A :*** *200 personnes n'ont pas acheté de salon de jardin.* ***Vrai***

$300-100=200$ personnes ne sont effectivement pas dans l'ensemble J.

➋ ***Item B :*** *80 personnes n'ont réalisé aucun achat de ces 3 articles.* ***Faux***

$d=300-20-8-62-10-2-28-80=300-210=90$.

➋ ***Item C :*** *4 personnes ont acheté une tondeuse, un salon de jardin et un parasol.* ***Faux***

Il n' y a que 2 personnes dans $\mathrm{T}\cap\mathrm{J}\cap\mathrm{P}$.

➋ ***Item D :*** *20 personnes ont acheté uniquement une tondeuse.* ***Vrai***

☰ Exercice 4 : FFFV

Posons que l'équipe sportive est constituée de g garçons et f filles et considérons une fille en particulier de cette équipe.
Alors celle-ci a $f-1$ copéquipières (car on ne compte pas la fille considérée) et, d'après l'énoncé, $g=2(f-1)$ coéquipiers (car la fille considérée a 2 fois plus de coéquipiers que de coéquipières).
D'où le nombre total n des membres de l'équipe : $n=f+g=f+2(f-1)=3f-2$.

Construisons alors un tableau d'effectifs en fonction des données de l'énoncé et notons P l'événement « avoir participé à l'entraînement de jeudi dernier ». On sait que :

- La moitié des filles ont participé à l'entraînement ;
- 23 garçons ont participé à l'entraînement ;
- 40% des membres de l'équipe ont participé à l'entraînement.

	P	$\overline{P}$	TOTAL
Filles	$0{,}5f$		f
Garçons	23		$2(f-1)$
TOTAL	$0{,}4\,(3f-2)$		$3f-2$

Il vient l'équation :

$$\begin{aligned} 0{,}5f+23=0{,}4\,(3f-2) &\iff 0{,}5f+23=1{,}2f-0{,}8 \\ &\iff 23+0{,}8=1{,}2f-0{,}5f \\ &\iff f=\frac{23{,}8}{0,7}=34 \end{aligned}$$

D'où le tableau complété :

	P	$\overline{P}$	TOTAL
Filles	$0{,}5\times 34=17$	$34-17=17$	34
Garçons	23	$66-23=43$	$2(34-1)=66$
TOTAL	$0{,}4\,(3\times 24-2)=40$	$100-60=40$	$3f-2=100$

➋ ***Item A :*** *Chaque garçon de ce groupe a deux fois moins de coéquipières que de coéquipiers.* ***Faux***
Chaque garçon a $66-1=65$ coéquipiers et 34 coéquipières.

➋ ***Item B :*** *40% des garçons ont participé à l'entraînement de jeudi dernier.* ***Faux***
$\frac{23}{40}\times 100=57{,}5\%$ des garçons ont participé à l'entraînement de jeudi dernier.

➋ ***Item C :*** *Le nombre de filles de cette équipe est égal à 32.* ***Faux***
➋ ***Item D :*** *Le nombre de garçons de cette équipe est un multiple de 3.* ***Vrai***
$66=3\times 22$ est bien un multiple de 3.

≡ Exercice 5 : FVFF

Item A : *Le suspect était présent sur le lieu du vol.* ***Faux***

Si le suspect a déclaré « J'étais chez mes parents à la date du vol » et qu'il a menti alors cela signifie seulement qu'il n'était pas chez ses parents à la date du vol mais pas forcément qu'il était présent sur le lieu du vol.

Item B : *Le suspect a déjà vu au moins une fois la victime du vol.* ***Vrai***

Si le suspect a déclaré « Je n'ai jamais vu la victime du vol » et qu'il a menti alors cela signifie effectivement qu'il a déjà vu la victime au moins une fois car le contraire de « aucun » est « au moins un ». *Voir loi binomiale où* $p(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0)$.

Item C : *Tous les membres de sa famille peuvent confirmer qu'il n'avait pas une blessure à la main à la date du vol.* ***Faux***

Si le suspect a déclaré « Tous les membres de ma famille peuvent confirmer que j'avais une blessure à la main à la date du vol » et qu'il a menti alors cela signifie qu'il existe au moins un membre de sa famille qui peut confirmer qu'il n'avait pas de blessure à la main à la date du vol.

Item D : *Il n'a pas actuellement un travail et il ne gagne pas bien sa vie.* ***Faux***

Si le suspect a déclaré « J'ai actuellement un travail et je gagne bien ma vie » et qu'il a menti alors cela signifie qu'il n'a pas de travail **ou** qu'il ne gagne pas bien sa vie car le contraire de (P **et** Q) est (non P **ou** non Q)

≡ Exercice 6 : FVVV

➋ *Item A :* *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fontion f est définie* ***Faux***

$f(x)$ existe si et seulement si $1 - 2e^x \neq 0$

$$\begin{aligned} 1 - 2e^x = 0 &\iff e^x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \end{aligned}$$

La valeur interdite de f est $-\ln 2$ donc f est définie pour tout réel $x \in \mathcal{D}f$ avec $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{-\ln 2\} =]-\infty\,; -\ln 2[\, \cup\,]-\ln 2\,; +\infty[$

➋ *Item B :* $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1-2e^x)} + \dfrac{2e^x(e^x+3)}{(1-2e^x)^2}$ ***Vrai***

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \text{ on a } f'(x) &= \left(\frac{3+e^x}{1-2e^x}\right)' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(3+e^x)'(1-2e^x) - (3+e^x)(1-2e^x)'}{(1-2e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(1-2e^x) - (3+e^x)\times(-2e^x)}{(1-2e^x)^2} \\ &= \frac{e^x - 2e^{2x} + 6e^x + 2e^{2x}}{(1-2e^x)^2} \\ &= \boxed{\frac{7e^x}{(1-2e^x)^2}} \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{(1-2e^x)} + \frac{2e^x(e^x+3)}{(1-2e^x)^2} &= \frac{e^x \times (1-2e^x)}{(1-2e^x)\times(1-2e^x)} + \frac{2e^x(e^x+3)}{(1-2e^x)^2} \\ &= \frac{e^x - 2e^{2x} + 2e^{2x} + 6e^x}{(1-2e^x)^2} \\ &= \boxed{\frac{7e^x}{(1-2e^x)^2}} \end{aligned}$$

On a donc bien $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1-2e^x)} + \dfrac{2e^x(e^x+3)}{(1-2e^x)^2}$

➋ *Item C :* $f'(\ln(1)) = 7$ ***Vrai***

$$f'(\ln(1)) = f'(0) = \frac{7e^0}{(1-2e^0)^2} = \frac{7\times 1}{(1-2\times 1)^2} = \frac{7}{(-1)^2} = \frac{7}{1} = 7$$

➋ *Item D :* *f est strictement croissante pour tout $x \in \mathcal{D}f$* ***Vrai***

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(1-2e^x)^2 > 0$ car c'est un carré. Par conséquent, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}f$ et f est donc strictement croissante sur $\mathcal{D}f$.

Exercice 7 : VVVV

Item A : *Pour tout réel $x \in]-1\,;+\infty[$, $g(x) \leq 5$* **Vrai**

x	-1		4		$+\infty$
Variations de g	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

5 est le maximum de g sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ donc pour tout réel $x \in]-1\,;+\infty[$, $g(x) \leq 5$

Item B : *Pour tout réel $x \in]-5\,;4]$, $g'(x) \geq 0$* **Vrai**

x	-5		4
Variations de g	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	5

g est croissante sur l'intervalle $]-5\,;4]$ donc sa dérivée $g'(x)$ est positive ou nulle sur cet intervalle soit $g'(x) \geq 0$

Item C : *La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle* $[4\,;+\infty[$ **Vrai**

On sait que $f(x) = \ln(g(x))$ d'où $\boxed{f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}}$ car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

x	4		$+\infty$
Variations de g	5	$\searrow$	1

On constate que que sur $[4\,;+\infty[$, $g(x) \in]1\,;5]$ donc $g(x) > 0$ et que g est décroissante, ce qui signifie que $g'(x) \leq 0$. Par conséquent : $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} \leq 0$ sur $[4\,;+\infty[$ et f est décroissante sur cet intervalle.

Item D : *La dérivée $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ est négative sur* $[4\,;+\infty[$ **Vrai**

Nous l'avons montré dans l'affirmation précédente.

≡ EXERCICE 8 : VVVF

➜ ***Item A :*** *La probabilité que E ait une racine double est égale à* $\frac{1}{6}$ ***Vrai***

E a une racine double si et seulement si son discriminant Δ est nul, soit :

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\iff (-2n)^2 - 4\times 1\times b^2 = 0\\ &\iff 4n^2 - 4b^2 = 0\\ &\iff 4(n^2 - b^2) = 0\\ &\iff n^2 - b^2 = 0 \quad \text{en divisant chaque membre de l'égalité par 4}\\ &\iff (n-b)(n+b) = 0\\ &\iff n - b = 0 \quad \text{ou} \quad n + b = 0\\ &\iff n = b \quad \text{ou} \quad n = -b\end{aligned}$$

n \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

$n = -b$ étant impossible car $n > 0$ et $b > 0$, pour que E ait une racine double, il faut que la face apparente du dé noir soit égale à celle du dé blanc. Il y a 6 possibilités différentes d'une telle configuration sur les 36 issues possibles soit $p = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$

➜ ***Item B :*** *La probabilité que E n'ait aucune racine réelle est égale à* $\frac{5}{12}$ ***Vrai***

E n'a aucune racine réelle si et seulement si son discriminant Δ est négatif, soit :

$$\begin{aligned}\Delta < 0 &\iff (n-b)(n+b) < 0\\ &\iff (n-b) < 0 \quad \text{car } n+b \text{ est toujours positif}\\ &\iff n < b\end{aligned}$$

n \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

Pour que E n'ait aucune racine réelle, il faut que la face apparente du dé noir soit strictement inférieure à la face apparente du dé blanc soit $p = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}$

Item C : *La probabilité que E ait deux racines réelles distinctes est égale à* $\frac{5}{12}$ ***Vrai***

E a deux racines réelles distinctes si et seulement si $\Delta > 0$. Par un raisonnement analogue à précédemment, on détermine que c'est pour $n > b$, soit $p = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}$

On peut aussi calculer cette probabilité par complémentarité soit $p = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$

Item D : *Si E a deux racines réelles distinctes, la probabilité qu'elles soient de même signe est égale à* $\frac{1}{2}$ ***Faux***

Pour un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ qui admet deux racines distinctes x_1 et x_2, on rappelle que :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Or, un polynôme du second degré admet deux racines réelles distinctes de même signe si et seulement si :

- soit $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$
- soit $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$

Dans les deux cas, un polynôme du second degré admet donc deux racines réelles distinctes de même signe si et seulement si $x_1 x_2 > 0$.

Soit pour le polynôme $1x^2 - 2nx + b^2$, si et seulement si $\frac{b^2}{1} = b^2 > 0$. Or b^2 est toujours strictement positif, par conséquent, la probabilité que E admette deux racines réelles distinctes de même signe est égale à 1.

≡ Exercice 9 : VVFV

x_i	1,4	1,6	1,8	2	2,2
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Item A : *L'espérance mathématique de X est 1,8* ***Vrai***

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$ d'où :

$$E(\mathrm{X}) = 1{,}4 \times \frac{1}{12} + 1{,}6 \times \frac{1}{6} + 1{,}8 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 2{,}2 \times \frac{1}{12} = \boxed{1{,}8}$$

Item B : *Si on prélève un clou au hasard dans la caisse, la probabilité qu'il mesure 2 centimètres ou plus est égale à $\frac{1}{4}$* ***Vrai***

$$p(\mathrm{X} \geq 2) = p(\mathrm{X} = 2) + p(\mathrm{X} = 2{,}2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Item C : *4 fois de suite, on prélève au hasard un clou dans la caisse, on le mesure et on l'y remet. La probabilité d'avoir prélevé un ou plusieurs clous mesurant 1,4 centimètres est égale à $\left(\frac{1}{12}\right)^4$* ***Faux***

On reconnaît dans l'expérience décrite un schéma de Bernoulli au cours duquel on répète $n = 4$ fois de manière identiques et indépendantes une épreuve qui consiste à considérer si un clou mesure ou non 1,4 centimètres et dont la probabilité vaut $\frac{1}{12}$

Si on note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de clous prélevés mesurant 1,4 centimètres au cours de cette expérience alors Y suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{1}{12}$

La probabilité que Y compte k succès au cours des n répétitions est alors donnée par la formule :

$$p(\mathrm{Y} = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Ici, on cherche la probabilité qu'au moins un clou prélevé mesure 1,4 centimètres, soit :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{Y} \geq 1) &= 1 - p(\mathrm{Y} = 0) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \times \left(\frac{1}{12}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{4-0} \\ &= 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{11}{12}\right)^4 \quad \text{car } \binom{n}{0} = 1 \\ &= \boxed{1 - \left(\frac{11}{12}\right)^4} \end{aligned}$$

➋ ***Item D :*** *4 fois de suite, on prélève au hasard un clou dans la caisse, on le mesure et on l'y remet. La probabilité d'avoir prélevé un ou plusieurs clous de longueur strictement inférieure à 1,6 centimètres est* $1-\left(\frac{11}{12}\right)^4$ ***Vrai***

On reconnaît là encore dans l'expérience décrite un schéma de Bernoulli au cours duquel on répète $n = 4$ fois de manière identiques et indépendantes une épreuve qui consiste à considérer si un clou a ou n'a pas une mesure strictement inférieure à 1,6 centimètres et dont la probabilité p est $p = p(\mathrm{X} < 1{,}6) = p(\mathrm{X} = 1{,}4) = \frac{1}{12}$

On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de clous prélevés ayant une mesure strictement inférieure à 1,6 centimètres au cours de cette expérience. Z suit alors une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{1}{12}$

On peut alors chercher la probabilité qu'au moins un clou prélevé ait une mesure strictement inférieure à 1,6 centimètres :

$$\begin{aligned}
p(\mathrm{Z} \geq 1) &= 1 - p(\mathrm{Z} = 0) \\
&= 1 - \binom{4}{0} \times p^0 \times (1-p)^{4-0} \\
&= 1 - \binom{4}{0} \times \left(\frac{1}{12}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{4-0} \\
&= 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{11}{12}\right)^4 \\
&= \boxed{1 - \left(\frac{11}{12}\right)^4}
\end{aligned}$$

≡ Exercice 10 : FFFF

Item A : *L'ensemble de définition est $\mathcal{D}f =]0\,;+\infty[$* ***Faux***

$f(x) = \ln\left(x^4 - 1\right)$ existe si et seulement si $x^4 - 1 > 0$

$$\begin{aligned} x^4 - 1 > 0 &\iff \left(x^2\right)^2 - 1^2 > 0 \\ &\iff (x^2 - 1)(x^2 + 1) > 0 \qquad \text{car } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &\iff (x-1)(x+1)(x^2+1) > 0 \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes de ce polynôme :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$		$+$	
$x^4 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, $f(x)$ est existe pour tout réel $x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[= \mathcal{D}f$

Item B : *Pour tout $x \in \mathcal{D}f$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$* ***Faux***

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \text{ on a } f'(x) &= \left(\ln\left(x^4 - 1\right)\right)' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ &= \frac{\left(x^4 - 1\right)'}{x^4 - 1} \\ &= \boxed{\frac{4x^3}{x^4 - 1}} \end{aligned}$$

Item C : *f est strictement croissante sur $\mathcal{D}f$* ***Faux***

$f'(x)$ est du signe de $4x^3$ car $x^4 - 1$ est toujours positif, d'où :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
f		↘				↗	

Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ puis croissante sur $]1\,;+\infty[$

Item D : *$f(x) = \ln\left(x^4\right) - \ln(1)$* ***Faux***

$\ln\left(x^4\right) - \ln(1) = \ln\left(x^4\right) - 0 = \ln\left(x^4\right) \neq f(x)$

Partie 3 - Problème mathématique

≡ Exercice 11 : FVFV

Rappelons les formules introduites par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\textit{Coût de revient unitaire} &= \frac{\textit{Somme des charges directes et indirectes}}{\textit{Quantités produites}} \\
\textit{Marge unitaire} &= \textit{Prix de vente unitaire} - \textit{Coût de revient unitaire} \\
\textit{Marge totale} &= \textit{Montant total des ventes} - (\textit{Charges directes} + \textit{Charges indirectes}) \\
&= \textit{Marge unitaire} \times \textit{Quantité vendue}
\end{aligned}$$

Et les charges directes mesuelles :

- Pâte à pizza 300€
- Ingrédients pour les pizzas 1 000€
- Electricité pour le four 150€
- Salaire du pizzaïolo 1 400€ + 25% de charges sociales à payer à l'État
- Une boîte à 0€20 la pièce pour chacune des pizzas fabriquées

Item A : *Le coût unitaire de la pâte à pizza (coût pour une pizza) représente 0€50.* ***Faux***

$$\textit{Coût unitaire pâte à pizza} = \frac{\textit{Coût pâte à pizza}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} = \frac{300}{500} = 0{,}6€$$

Item B : *Le coût unitaire du pizzaïolo (charges sociales comprises) représente 3€50 (coût pour une pizza).* ***Vrai***

$$\textit{Coût unitaire pizzaïolo} = \frac{\textit{Coût salaire pizzaïolo}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} = \frac{1\,400 + 0{,}25 \times 1\,400}{500} = \frac{1\,750}{500} = 3{,}5€$$

Item C : *L'ensemble des charges directes mensuelles représentent 3 000€.* ***Faux***

$$\textit{Somme des charges directes} = 300 + 1\,000 + 150 + 1\,750 + 500 \times 0{,}2 = 3\,300€$$

Item D : *Le coût de l'ensemble des charges directes représente 6€60 par pizza.* ***Vrai***

$$\textit{Coût unitaire des charges directes} = \frac{\textit{Somme des charges directes}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} = \frac{3\,300}{500} = 6{,}6€$$

≡ EXERCICE 12 : VFFV

Rappelons les charges indirectes supportées par l'entreprise de Paolo :

- Loyer 1 500€
- Frais généraux divers 500€
- Autres charges de personnel 1 600€ + 25% de charges sociales à payer à l'État
- Publicité 400€

Item A : *Le coût unitaire des autres charges de personnel (charges sociales incluses) représente 4€.* ***Vrai***

$$\textit{Coût unitaire personnel} = \frac{\textit{Charges de personnel}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} = \frac{1\,600 + 0{,}25 \times 1\,600}{500} = \frac{2\,000}{500} = 4€$$

Item B : *Le coût de revient d'une pizza (coût de revient unitaire) est de 15€30.* ***Faux***

$$\begin{aligned}\textit{Coût de revient par pizza} &= \frac{\textit{Somme des charges directes et indirectes}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} \\ &= \frac{3\,300 + 1\,500 + 500 + 2\,000 + 400}{500} \\ &= \frac{3\,300 + 4\,400}{500} \\ &= 15{,}4€\end{aligned}$$

Item C : *En vendant une pizza 16€, la marge unitaire représentera plus de 4% du prix de vente unitaire.* ***Faux***

Marge unitaire par pizza = *Prix de vente unitaire - Coût de revient unitaire* $= 16 - 15{,}4 = 0{,}6€$

Or $\dfrac{0{,}6}{16} = 0{,}037\,5$ donc la marge unitaire de 0,6€ représente 3,75% du prix de vente unitaire.

Item D : *La marge totale sur le mois est de 300€ si toutes les pizzas fabriquées sont vendues à 16€ l'unité.* ***Vrai***

Marge totale = *Marge unitaire par pizza* × *Quantité de pizzas vendues* $= 0{,}6 \times 500 = 300€$

☰ EXERCICE 13 : VFVV

Item A : *Si l'hypothèse 1 est retenue, le coût de revient d'une pizza serait supérieur à 17€.* ***Vrai***

Si l'hypothèse 1 est retenue alors il devra supporter une charge mensuelle indirecte supplémentaire de 1 000€ tout en conservant sa production de 500 pizzas d'où :

$$\begin{aligned}\textit{Coût de revient par pizza} &= \frac{\textit{Somme des charges directes et indirectes}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} \\ &= \frac{3\,300 + 4\,400 + 1\,000}{500} \\ &= 17{,}4€ > 17€\end{aligned}$$

Item B : *Si l'hypothèse 2 est retenue, les charges directes mensuelles seraient de 3 850€.* ***Faux***

Si l'hypothèse 2 est retenue alors :

- il devra supporter une charge mensuelle **indirecte** supplémentaire de 1 100€ ;
- sa production passera à 600 pizzas par mois ;
- il subira un surcoût de 20% des charges mensuelles directes sur la pâte à pizza et les ingrédients.

D'où, en ne tenant pas compte des 1 100€ qui rentre dans le cadre du calcul des charges mensuelles indirectes :

$\textit{Somme des charges directes} = (300 + 1\,000) \times 1,2 + 150 + 1\,750 + 600 \times 0{,}2 = 3\,580€$

Item C : *Si l'hypothèse 2 est retenue, le coût de revient d'une pizza serait inférieur au coût de revient d'une pizza avec l'hypothèse 1.* ***Vrai***

$$\begin{aligned}\textit{Coût de revient par pizza} &= \frac{\textit{Somme des charges directes et indirectes}}{\textit{Quantité de pizzas produites}} \\ &= \frac{3\,580 + 4\,400 + 1\,100}{600} \\ &\simeq 15{,}13€ < 17{,}4€\end{aligned}$$

Item D : *Si l'hypothèse 2 est retenue et que les 600 pizzas sont vendues à 16€ l'unité, la marge totale mensuelle serait supérieure à 0.* ***Vrai***

$\textit{Marge totale} = \textit{Marge unitaire par pizza} \times \textit{Quantité de pizzas vendues} = (16 - 15{,}13) \times 600 = 522€$

≡ Exercice 14 : VFFF

Item A : *L'entreprise pourrait fabriquer 500 pizzas P2.* ***Vrai***

Le coût unitaire des ingrédients de la pizza P2 est de 1€60. Le coût en ingrédients de 500 pizzas s'élève donc à $500 \times 1{,}6 = 800$€.
Or, Paolo s'est engagé à continuer à commander pour 1 000€ d'ingrédients auprès de son fournisseur. L'entreprise est donc en mesure de fabriquer 500 pizzas par mois de type P2.

Item B : *L'entreprise pourrait fabriquer 500 pizzas P1.* ***Faux***

Le coût unitaire des ingrédients de la pizza P1 est de 2€60. Le coût en ingrédients de 500 pizzas s'élève donc à $500 \times 2{,}6 = 1300$€ qui est supérieure à la limite de 1 000€ d'ingrédients que Paolo s'est imposé de commander à son fournisseur.

Item C : *Pour utiliser la pleine capacité de production et l'ensemble des ingrédients commandés, l'entreprise devrait produire 150 pizzas P1 et 350 pizzas P2 mensuellement.* ***Faux***

Pour utiliser la pleine capacité de ses outils de production, Paolo doit faire en sorte que sa production de pizzas de type P1 noté x_1 et sa production de pizzas de type P2 noté x_2 utilisent exactement les 1 000€ d'ingrédients afin qu'il n'y ait aucune perte, soit $2{,}6x_1 + 1{,}6x_2 = 1\,000$. Par ailleurs, il doit fabriquer 500 pizzas de type P1 et P2 d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500 & (\times 2{,}6) \\ 2{,}6x_1 + 1{,}6x_2 = 1\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} 2{,}6x_1 + 2{,}6x_2 = 1\,300 & (e_1) \\ 2{,}6x_1 + 1{,}6x_2 = 1\,000 & (e_2) \end{cases}$$

Il vient $(e_1) - (e_2) \iff x_2 = 300$ et par suite $x_1 = 500 - x_2 = 500 - 300 = 200$.
Par conséquent, la production est optimale lorsque l'entreprise fabrique **200 pizzas de type P1 et 300 pizzas de type P2**.

Item D : *Si l'entreprise utilise la pleine capacité de production et l'ensemble des ingrédients commandés et si elle arrivait à vendre toutes les pizzas fabriquées, alors sa marge totale mensuelle serait de 650 €.* ***Faux***

Sachant que les 200 pizzas de type P1 sont vendues 17,5€ l'unité et que les 300 pizzas de type P2 sont vendues 16€ l'unité alors :

$$\begin{aligned} \textit{Marge totale} &= \textit{Montant total des ventes} - (\textit{Charges directes} + \textit{Charges indirectes}) \\ &= 200 \times 17{,}5 + 300 \times 16 - (3\,300 + 4\,400) \\ &= 8\,300 - 7\,700 \\ &= 600€ \neq 650€ \end{aligned}$$

☰ Exercice 15 : VFVF

Rappelons l'étude des ventes prévisionnelles de Paolo :

- Avril : 100 pizzas P1 vendues et donc 400 pizzas P2
- Mai : 150 pizzas P1 vendues et donc 350 pizzas P2
- Juin : 200 pizzas P1 vendues et donc 300 pizzas P2
- Juillet : 250 pizzas P1 vendues et donc 250 pizzas P2

Item A : *En avril, l'entreprise pourra produire 400 pizzas P2 en plus des 100 pizzas P1 et elle aura une marge totale de 450€.* ***Vrai***

$$\begin{aligned} \text{Marge totale d'avril} &= \text{Montant total des ventes} - (\text{Charges directes} + \text{Charges indirectes}) \\ &= 100 \times 17{,}5 + 400 \times 16 - (3\,300 + 4\,400) \\ &= 8\,150 - 7\,700 \\ &= 450€ \end{aligned}$$

Item B : *En mai, l'entreprise pourra produire 350 pizzas P2 en plus des 150 pizzas P1 et elle augmentera sa marge totale de 20% par rapport à avril.* ***Faux***

$$\begin{aligned} \text{Marge totale de mai} &= \text{Montant total des ventes} - (\text{Charges directes} + \text{Charges indirectes}) \\ &= 150 \times 17{,}5 + 350 \times 16 - 7\,700 \\ &= 525€ \end{aligned}$$

Or $450€ \times 1{,}2 = 540€ \neq 525€$

Item C : *D'avril à juin, si l'entreprise produit 500 pizzas par mois dont le nombre des pizzas P1 prévu par l'étude à chacun des mois, la marge totale sera de 1 575€.* ***Vrai***

$$\begin{aligned} \text{Marge totale d'avril à juin} &= \text{Marge totale d'avril} + \text{Marge totale de mai} + \text{Marge totale de juin} \\ &= 450 + 525 + (200 \times 17{,}5 + 300 \times 16 - 7\,700) \\ &= 1\,575€ \end{aligned}$$

Item D : *En juillet, l'entreprise pourra produire 250 pizzas P2 en plus des 250 pizzas P1 et elle aura une marge totale de 675€.* ***Faux***

L'entreprise ne peut pas produire 250 pizzas de type P1 et 250 pizzas de type P2 car cette production ne respecte pas la contrainte sur la limite des 1 000€ en achat d'ingrédients.
En effet, $2{,}6 \times 250 + 1{,}6 \times 250 = 1\,050€ > 1\,000€$.