Concours ACCÈS 2022

Corrigé de l'épreuve de Raisonnement Logique et Mathématiques

© *Mathieu Pons*
@ contact@mathete.net

Liste des exercices

Partie 1 - Raisonnement logique

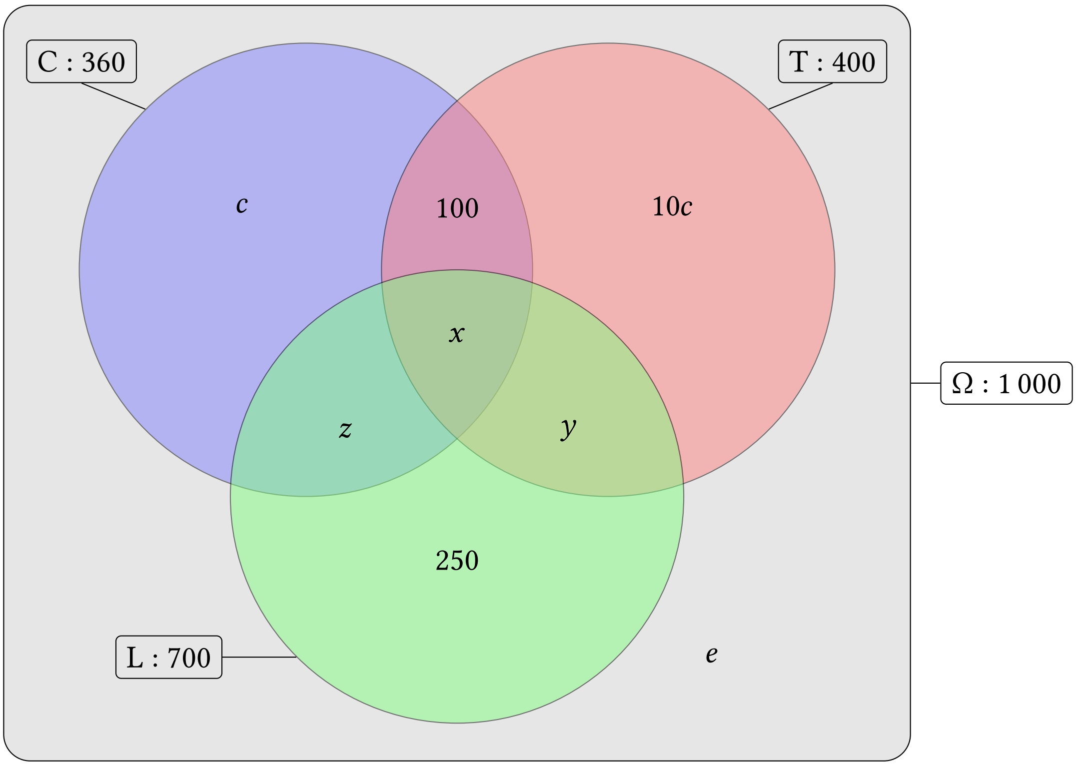
≡ Exercice 1 : FFFF

La formulation de l'énoncé permet d'envisager la réalisation d'un diagramme de Venn dans lequel on va noter :

- C l'ensemble des personnes ayant acheté un chapeau ;
- L celles ayant acheté une paire de lunettes de soleil ;
- T celles ayant acheté un t-shirt.

Traduisons certaines données de l'énoncé :

- *Il y a 10 fois plus de personnes qui souhaitent acheter uniquement un t-shirt que d'acheteurs potentiels d'un chapeau uniquement* signifie que si l'on note c le nombre de personnes ayant acheté uniquement un chapeau alors il y a $10c$ personnes qui ont acheté un t-shirt seulement ;
- *25 % des personnes ont l'intention de n'acheter qu'une paire de lunettes solaires* permet de déduire qu'il y a $0{,}25 \times 1\,000 = 250$ personnes dans $L \cap \overline{C} \cap \overline{T}$;
- *50 % des personnes qui souhaitent acheter un t-shirt ont aussi l'intention d'acheter une paire de lunettes solaires* signifie que dans le diagramme ci-dessous, $x + y = 0{,}5 \times 400 = 200$.



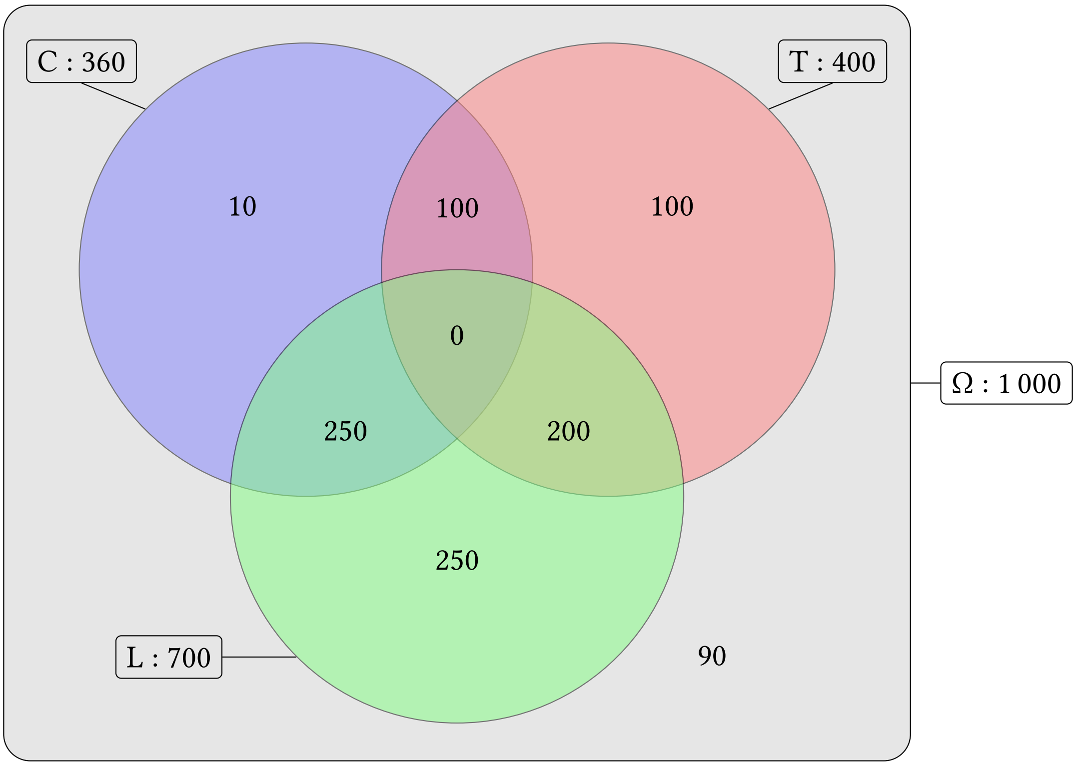
Cherchons à déterminer c : $100 + 10c + \underbrace{x + y}_{200} = 400 \iff c = \dfrac{400 - 200 - 100}{10} = 10.$

Puis z : $x + y + z + 250 = 700 \iff z = 700 - 200 - 250 = 250.$

On a par ailleurs $x + z + c + 100 = 360$ d'où $x = 360 - 100 - 250 - 10 = 0$ et $x + y = 200 \iff y = 200.$

Enfin, nous pouvons obtenir $e = 1\,000 - 10 - 100 - 100 - 250 - 200 - 250 = 90.$

Le diagramme complété est alors le suivant :



➋ ***Item A :*** *100 personnes ont l'intention de ne rien acheter.* ***Faux***
90 personnes ont l'intention de ne rien acheter.

➋ ***Item B :*** *On ne peut déduire le nombre de personnes qui ont l'intention d'acheter les 3 produits.* ***Faux***
On a pu montrer qu'aucune personne a l'intention d'acheter les trois produits.

➋ ***Item C :*** *450 personnes exactement ont l'intention d'acheter au moins 2 produits.* ***Faux***
$250 + 0 + 200 + 100 = 550$ personnes on l'intention d'acheter au moins deux produits.

➋ ***Item D :*** *Le chiffre d'affaires potentiellement généré par ces 1 000 personnes, est estimé à 32 500 €.* ***Faux***
360 personnes ont acheté un chapeau à 20 €, 400 ont acheté un t-shirt à 15 € et 700 ont acheté une paire de lunettes de soleil à 30 €. Par conséquent le chiffre d'affaires généré par ces achats s'élève à :

$$360 \times 20 + 400 \times 15 + 700 \times 30 = 34\,200\,€$$

≡ Exercice 2 : VFFF

On sait qu'il y a n étudiants dont deux fois plus de filles que de garçons, par conséquent :

$$\begin{cases} f+g=n \\ f=2g \end{cases} \iff \begin{cases} 2g+g=n \\ f=2g \end{cases} \iff \begin{cases} 3g=n \\ f=2g \end{cases} \iff \begin{cases} g=\dfrac{1}{3}n \\ f=\dfrac{2}{3}n \end{cases}$$

Item A : *En moyenne, un garçon a renseigné un nombre journalier de questionnaires égal à* $\dfrac{36\,000}{x.n}$ ***Vrai***

Si on note r_g le nombre journalier de questionnaires renseigné par un garçon alors on a :

$$\underbrace{r_g}_{\text{rendement moyen par garçon}} \times \underbrace{\frac{1}{3}n}_{\text{nombre de garçons}} \times \underbrace{x}_{\text{durée de l'étude}} = \underbrace{12\,000}_{\text{nombre total de questionnaires renseignés par les garçons}}$$

D'où :

$$\frac{r_g \times n \times x}{3} = 12\,000 \iff x = \frac{3 \times 12\,000}{xn} \iff \boxed{x = \frac{36\,000}{xn}}$$

Item B : *En moyenne sur la durée totale, une fille a renseigné* $\dfrac{20x}{n}$ *questionnaires.* ***Faux***

Une fille renseigne en moyenne 20 questionnaires par jour. Sur une durée totale de x jours, une fille renseigne donc en moyenne $20x$ questionnaires.

Item C : *Si les filles ont renseigné 32 000 questionnaires sur les x jours, alors :* $x = \dfrac{2\,000}{n}$ ***Faux***

Le nombre total de questionnaires renseignés par les filles s'obtient ainsi :

$$\underbrace{20}_{\text{rendement moyen par fille}} \times \underbrace{\frac{2}{3}n}_{\text{nombre de filles}} \times \underbrace{x}_{\text{durée de l'étude}} = \underbrace{32\,000}_{\text{nombre total de questionnaires renseignés par les filles}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{20 \times 2n \times x}{3} = 32\,000 &\iff 40nx = 3 \times 32\,000 \\ &\iff x = \frac{3 \times \cancel{4} \times 800 \times \cancel{10}}{\cancel{4} \times \cancel{10}n} \\ &\iff \boxed{x = \frac{2\,400}{n}} \end{aligned}$$

Item D : *Pour 44 000 questionnaires renseignés au total par l'ensemble des filles et des garçons, et un nombre de garçons égal à 40, on en déduit que x est inférieur à 18 jours.* ***Faux***

Si 44 000 questionnaires ont été renseignés au total dont 12 000 par les garçons, on déduit que $44\,000 - 12\,000 = 32\,000$ questionnaires ont été renseignés par les filles.
Par ailleurs, si $g = 40$ alors $f = 2 \times 40 = 80$ et $n = 120$.
On peut alors déduire d'après le résultat de l'item C que $x = \dfrac{2\,400}{120} = 20$ jours > 18 jours.

☰ Exercice 3 : FFVF

Notons a, b, c et d les bonus respectifs d'Alexandre, de Barnabé, de Chloé et de Denis. On peut alors déduire les equations suivantes :

- *Le bonus d'Alexandre est 3 fois moins élevé que celui de Denis* signifie que $d = 3a$;
- *Le bonus de Denis est 20 % plus élevé que celui de Barnabé* donne $d = 1{,}2b$;
- *Les bonus cumulés d'Alexandre et de Denis sont égaux aux bonus cumulés de Barnabé et de Chloé* permet d'affirmer que $a + d = b + c$;
- *On sait que Chloé a touché un bonus de 3 000 €* d'où $c = 3\,000$.

Le système d'équations à résoudre est alors :

$$\begin{cases} d = 3a \\ d = 1{,}2b \\ a + d = b + c \\ c = 3\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 3a & \\ 3a = 1{,}2b & (e_1) \\ 4a = b + 3\,000 & (e_2) \\ c = 3\,000 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 3a & \\ (12a - 12a) = (4{,}8b - 3b) + (4 \times 0 - 3 \times 3\,000) & (4e_1 - 3e_2) \\ 4a = b + 3\,000 & \\ c = 3\,000 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 3 \times 2\,000 & = 6\,000 \\ b = \dfrac{9000}{1{,}8} & = 5\,000 \\ a = \dfrac{5\,000 + 3\,000}{4} & = 2\,000 \\ c = 3\,000 & \end{cases}$$

Les bonus de chacun sont donc les suivants :

Alexandre	Barnabé	Chloé	Denis
2 000 €	5 000 €	3 000 €	6 000 €

➋ Item A : *Les bonus cumulés d'Alexandre et Chloé sont égaux à 6 000 €.* ***Faux***

Les bonus cumulés d'Alexandre et Chloé sont égaux à $2\,000 + 3\,000 = 5\,000$ €.

➋ Item B : *Le bonus le plus élevé est égal à 9 000 €.* ***Faux***

Le bonus le plus élevé est celui de Denis et il s'élève à 6 000 €.

➋ Item C : *Le bonus de Chloé est 50% plus élevé que celui d'Alexandre.* ***Vrai***

Si on prend le bonus d'Alexandre et qu'on l'augmente de 50%, on obtient : $2\,000 + \dfrac{50}{100} \times 2\,000 = 3\,000$ € qui est bien le montant du bonus de Chloé.

➋ Item D : *Le montant total du bonus qui a été partagé entre ces 4 vendeurs est supérieur à 17 000 €.* ***Faux***

Le montant total des bonus obtenus par les quatre vendeurs est de $2\,000 + 5\,000 + 3\,000 + 6\,000 = 16\,000$ € $<$ 17 000 €.

≡ Exercice 4 : FFVF

Pour traiter cette question, on peut construire un tableau représentant l'emploi du temps de Paul et le remplir avec les informations de l'énoncé :

- *Le cours en salle informatique a eu lieu en première heure*.
- *Le cours de finance a eu lieu en deuxième heure*;
- *Le cours de psychologie a eu lieu en amphi* et ne peut donc avoir eu lieu qu'en dernière heure;
- *L'intervenant de marketing est chargé de TD* et ce cours a forcément eu lieu en première heure;
- *L'intervenant chargé de TD et l'enseignant chercheur se sont succédés* et par conséquent l'enseignant chercheur est intervenu lors du cours de finance en deuxième heure;

Horaire	**Lieu**	**Matière**	**Enseignant**
14 h - 15 h	Salle informatique	Marketing	Chargé de TD
15 h - 16 h	Salle de coworking	Finance	Enseignant chercheur
16 h - 17 h	Amphi	Psychologie	Enseignant extérieur

Item A : *Le cours de l'intervenant extérieur a eu lieu en première heure.* ***Faux***
Le cours de l'intervenant extérieur a eu lieu en dernière heure.

Item B : *De 16 h à 17 h, le cours a eu lieu en salle de coworking.* ***Faux***
Ce cours a eu lieu en amphi.

Item C : *L'intervenant en finance est enseignant chercheur.* ***Vrai***
L'enseignant chercheur a bien assuré son cours de finance en deuxième heure.

Item D : *Le cours de psychologie a précédé le cours de finance.* ***Faux***
Le cours de psychologie a eu lieu après le cours de finance.

☰ Exercice 5 : FVFF

Item A : *Si on répète l'expérience n fois, l'élastique mesura* $(1{,}06x)^n$ *cm à la fin.* ***Faux***

$$\underbrace{x}_{\text{longueur initiale}} \xrightarrow{+6\%} \underbrace{1{,}06x}_{\text{après 1 étirement}} \xrightarrow{+6\%} \underbrace{1{,}06 \times 1{,}06x = 1{,}06^2x}_{\text{après 2 étirements}} \xrightarrow{+6\%} \underbrace{1{,}06^3x}_{\text{après 3 étirements}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underbrace{1{,}06^n x}_{\text{après } n \text{ étirements}}$$

L'élastique, après n étirements, mesure $1{,}06^n x$ cm.

Item B : *Si on répète l'expérience 2 fois, l'élastique se sera allongé de plus de 10 %.* ***Vrai***
Après deux étirements, l'élastique s'est allongé d'un coefficient multiplicateur égal à $1{,}06^2 = 1{,}123\,6$ soit une augmentation de $12{,}36\% > 10\%$.

Item C : *Après n expériences, l'élastique se sera allongé de* $0{,}06^n$ *cm.* ***Faux***
Après n étirements, l'élastique mesure $1{,}06^n x$ cm. Sa longueur initiale étant de x cm, elle s'est allongé, après n étirements, de $1{,}06^n x - x = (1{,}06^n - 1)\,x$ cm.

Item D : *Pour atteindre au moins une longueur de* $2x$ *cm, il faut répéter l'expérience y fois.* ***Faux***
Pour atteindre au moins une longueur de $2x$ cm, il faut n étirements avec n vérifant :

$$\begin{aligned}
1{,}06^n x \geq 2x &\iff 1{,}06^n \cancel{x} \geq 2\cancel{x} \\
&\iff \ln 1{,}06^n \geq \ln 2 \\
&\iff n \ln 1{,}06 \geq \ln 2 \qquad \text{car } \ln a^n = n \ln a \\
&\iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}06} \neq \frac{\ln 2x}{\ln 1{,}06} \\
&\iff \boxed{n \geq 12}
\end{aligned}$$

Quelque soit la longueur initiale de l'élastique, après 12 étirements, celle-ci aura vu sa longueur doubler.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

≡ Exercice 6 : VVVV

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+1}$

Item A : *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$* ***Vrai***

$f(x)$ existe si et seulement si son dénominateur $e^x + 1$ est non nul. Or, pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$ et par conséquent $e^x + 1$ n'est jamais nul donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Item B : *Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{4}{e^{-x}+1}$* ***Vrai***

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) &= \frac{4e^x}{e^x+1} \\
&= \frac{4}{e^{-x}(e^x+1)} \qquad \text{car } e^x = \frac{1}{e^{-x}} \\
&= \frac{4}{e^0 + e^{-x}} \\
&= \boxed{\frac{4}{1+e^{-x}}}
\end{aligned}$$

Item C : *Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, la dérivée de est $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$* ***Vrai***

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{(4e^x)'(e^x+1) - 4e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} \qquad \text{car } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \\
&= \frac{4e^x(e^x+1) - 4e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} \\
&= \frac{4e^{2x} + 4e^x - 4e^{2x}}{(e^x+1)^2} \\
&= \boxed{\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}}
\end{aligned}$$

Item D : *La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet pour équation réduite $y = x + 2$* ***Vrai***

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc au point d'abscisse 0, la tangente à $\mathcal{C}_f$ a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \text{avec } f(0) = \frac{4e^0}{e^0+1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } f'(0) = \frac{4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y = 1 \times x + 2$$

$$y = x + 2$$

☰ Exercice 7 : VVFF

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$

Item A : *Pour tout x réel, la dérivée de f est $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 1\right)$* ***Vrai***

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{2x}\right)' - \left(\mathrm{e}^x\right)' - (2)' \\ &= (2x)'\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \qquad \text{car } \left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u \\ &= 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \\ &= \boxed{\mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 1\right)}\end{aligned}$$

Item B : *La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\ln(0{,}5)[$* ***Vrai***

Justifions tout d'abord le signe de la dérivée :

$$2\mathrm{e}^x - 1 \geq 0 \iff \mathrm{e}^x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln(0{,}5)$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$2\mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$f(\ln(0{,}5))$	↗	

On constate que f est bien décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ln(0{,}5)[$.

Item C : *L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.* ***Faux***

On peut remarquer que sur l'intervalle $[0\,;1]$, on a $f(0) = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 - 2 = -2 < 0$ et que $f(1) \simeq 2{,}7 > 0$ donc :

x	$\ln(0{,}5)$		0		α		1		$+\infty$
f		↗	-2	↗	0	↗	$2{,}7$	↗	

Il existe donc un unique réel $\alpha \in [0\,;1]$ vérifiant $f(\alpha) = 0$ et par conséquent l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

Item D : *La tangente à C_f, au point d'abscisse 0, est parallèle à l'axe des abscisses.* ***Faux***

$f'(0) = \mathrm{e}^0\left(2\mathrm{e}^0 - 1\right) = 1 \neq 0$ donc la tangente à C_f au point d'abscisse 0 n'est pas horizontale.

≡ Exercice 8 : FVFV

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{8}{x\,(x^2-4)}$

➋ *Item A :* *$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ privé de $\{0\ ;\ 2\}$* ***Faux***

$f(x)$ existe si et seulement si $x\left(x^2-4\right) = x(x-2)(x+2) \neq 0$.
Or $x(x-2)(x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ privé de $\{-2\ ;\ 0\ ;\ 2\}$.

➋ *Item B :* *Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$* ***Vrai***

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) &= \frac{8}{(-x)\left((-x)^2-4\right)} \\
&= \frac{8}{-x\,(x^2-4)} \\
&= -\frac{8}{x\,(x^2-4)} \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

➋ *Item C :* *$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.* ***Faux***

Par définition, comme $f(-x) = -f(x)$, f est une fonction impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

➋ *Item D :* *Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{(x+2)} + \dfrac{1}{(x-2)}$* ***Vrai***

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) &= -\frac{2}{x} + \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x-2)} \\
&= \frac{-2(x+2)(x-2) + x(x-2) + x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{-2(x^2-4) + x^2 - 2x + x^2 + 2x}{x(x^2-4)} \\
&= \frac{-2x^2 + 8 + 2x^2}{x(x^2-4)} \\
&= \frac{8}{x(x^2-4)} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

≡ Exercice 9 : VVVF

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

➋ *Item A :* $\mathcal{D}_f =]-2\,;2[$ ***Vrai***

$f(x)$ existe si et seulement si $\dfrac{2-x}{2+x} > 0$. Dressons donc le tableau de signes de cette quantité :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2-x}{2+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

On constate que $\dfrac{2-x}{2+x} > 0$ pour tout réel x dans l'intervalle $]-2\,;2[$ donc $\mathcal{D}_f =]-2\,;2[$

➋ *Item B :* $f(0) = 0$ ***Vrai***

$f(0) = \ln\left(\dfrac{2-0}{2+0}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{2}\right) = \ln 1 = 0$

➋ *Item C :* *Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$* ***Vrai***

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) &= \ln\left(\frac{2-(-x)}{2+(-x)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\\
&= \ln(2+x) - \ln(2-x) \qquad \color{red}{\text{car } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}\\
&= \color{red}{-1} \times [\,\ln(2-x) - \ln(2+x)\,] \qquad \color{red}{\text{en factorisant par } -1}\\
&= -\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

➋ *Item D :* *Pour tout x de $\mathcal{D}_{f'}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{2+x}$* ***Faux***

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_{f'},\ f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right)'\\
&= (\,\ln(2-x) - \ln(2+x))'\\
&= \frac{(2-x)'}{(2-x)} - \frac{(2+x)'}{(2+x)} \qquad \color{red}{\text{car } (\ln u)' = \frac{u'}{u}}\\
&= \boxed{\frac{-1}{(2-x)} - \frac{1}{(2+x)}}
\end{aligned}$$

≡ Exercice 10 : FVFF

On a $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ 0{,}2)$ avec n entier naturel non nul fixé et $Y \sim \mathcal{B}(3\ ;\ 0{,}2)$.
Par ailleurs, lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'obtenir exactement k succès s'obtient par la formule :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Item A : $P(X = 1) = n \times 0{,}2^{n-1} \times 0{,}8$ ***Faux***

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} \times 0{,}2^1 \times (1-0{,}2)^{n-1} \\ &= \boxed{n \times 0{,}2 \times 0{,}8^{n-1}} \end{aligned}$$

Item B : *Si on veut que la variance de X soit égale à 0,8 alors il faut que $n = 5$* ***Vrai***
On cherche n tel que la variance $V(X) = n \times p \times (1-p)$ soit égale à 0,8.

$$\begin{aligned} n \times p \times (1-p) = 0{,}8 &\iff n \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}8 \\ &\iff n = \frac{\cancel{0{,}8}}{0{,}2 \times \cancel{0{,}8}} \\ &\iff n = \frac{1}{0{,}2} \\ &\iff \boxed{n = 5} \end{aligned}$$

Item C : $P(Y \leq 2) = 0{,}691$ ***Faux***
Comme $Y \sim \mathcal{B}(3\ ;\ 0{,}2)$, alors $P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = 1$ et on déduit donc que :

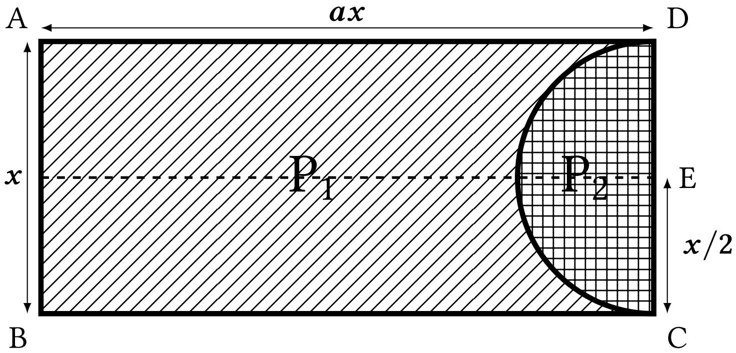
$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= 1 - P(Y=3) \\ &= 1 - \underbrace{\binom{3}{3}}_{=1} \times 0{,}2^3 \times \underbrace{(1-0{,}2)^0}_{=1} \\ &= 1 - 0{,}2^3 \\ &= 0{,}992 \end{aligned}$$

Item D : $P(2 < Y \leq 3) = 0{,}005$ ***Faux***

$$\begin{aligned} P(Y < 2 \leq 3) &= P(Y = 3) \\ &= 0{,}2^3 \\ &= 0{,}008 \end{aligned}$$

Partie 3 - Problème mathématique

≡ Exercice 11 : FFVV



➋ ***Item A :*** *Le périmètre (en mètre) du champ de M. Dupont est égal à* $2x + 2ax - \frac{\pi}{2}x$. ***Faux***

Le périmètre $\mathscr{P}_1$ (en mètre) du champ P_1 de M. Dupont est $\mathscr{P}_1 = DA + AB + BC + \overset{\frown}{CD}$ où $\overset{\frown}{CD}$ est la longueur de l'arc de cercle CD défini comme étant le demi-périmètre du cercle de rayon $CE = \frac{x}{2}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_1 &= DA + AB + BC + \overset{\frown}{CD} \\ &= ax + x + ax + \frac{\cancel{2}\pi \times \frac{x}{2}}{\cancel{2}} \\ &= \boxed{x + 2ax + \frac{\pi}{2}x}\end{aligned}$$

➋ ***Item B :*** *La surface (en m²) de la partie* P_2 *est égale à* $\frac{\pi}{4}x^2$. ***Faux***

La surface $\mathscr{A}_2$ (en m²) du champ P_2 de M. Michel est égale à l'aire d'un demi-cercle de rayon $\frac{x}{2}$, d'où :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}x^2 \\ &= \boxed{\frac{\pi}{8}x^2}\end{aligned}$$

➋ ***Item C :*** *La surface (en m²) de la partie* P_1 *est égale à* $\left(a - \frac{\pi}{8}\right)x^2$. ***Vrai***

La surface $\mathscr{A}_1$ (en m²) du champ de M. Dupont est alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= ax \times x - \frac{\pi}{8}x^2 \\ &= \boxed{\left(a - \frac{\pi}{8}\right)x^2}\end{aligned}$$

➋ ***Item D :*** *Pour* $a = \frac{3\pi}{8}$, *la surface de la partie* P_1 *vaut le double de celle de la partie* P_2. ***Vrai***

Pour $a = \frac{3\pi}{8}$, $\mathscr{A}_1 = \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right)x^2 = \frac{2\pi}{8}x^2 = 2 \times \frac{\pi}{8}x^2 = 2\mathscr{A}_2$.

≡ Exercice 12 : VFFV

La clôture qui sépare les deux terrains de M. Dupont et M. Michel est représentée sur le schéma de la question précédente par l'arc de cercle $\overset{\frown}{CD}$ de longueur noté ℓ égale à $\frac{\pi}{2}x$ mètres.

Item A : *Si $x = 50$, la longueur de la clôture sera supérieure à 78 mètres.* ***Vrai***

Si $x = 50$ alors $\ell = \frac{\pi}{2} \times 50 = 25 \times 3{,}14 = 78{,}5\,\text{m} > 78\,\text{m}$.

Item B : *Si $x = 50$, le montant du devis apporté par M. Dupont dépasse 1 400 €.* ***Faux***

Si $x = 50$ alors $\ell = 78{,}5$ et le montant du devis de M. Dupont s'élève à $1\,000 + 5 \times 78{,}5 = 1\,392{,}5\,€ < 1\,400\,€$.

Item C : *Si $x = 50$, le montant du devis apporté par M. Michel est plus intéressant que celui apporté par M. Dupont.* ***Faux***

Si $x = 50$ alors $\ell = 78{,}5$ et le montant du devis de M. Michel s'élève à $25 \times 78{,}5 = 1\,962{,}5\,€ > 1\,392{,}5\,€$.
Celui-ci n'est donc pas plus intéressant que le devis apporté par M. Dupont.

Item D : *Si $x = \frac{100}{\pi}$, les deux devis sont équivalents.* ***Vrai***

Les deux devis sont équivalents si :

$$\begin{aligned}
1\,000 + \frac{\pi}{2}x \times 5 = \frac{\pi}{2}x \times 25 &\iff 1\,000 = \frac{\pi}{2}x \times 25 - \frac{\pi}{2}x \times 5 \\
&\iff 1\,000 = \frac{\pi}{2}x \times (25 - 5) \\
&\iff 1\,000 = \frac{\pi}{2}x \times 20 \\
&\iff 1\,000 = 10\pi x \\
&\iff x = \frac{1\,000}{10\pi} \\
&\iff \boxed{x = \frac{100}{\pi}}
\end{aligned}$$

☰ Exercice 13 : FFFV

Item A : $5x_1 + 3x_2 = 5$ ***Faux***

Il est précisé dans l'énoncé que pour 5 €, M. Dupont obtient 3 plants de tomates au prix de x_1 € et 5 plants de tournesols au prix de x_2 € donc $3x_1 + 5x_2 = 5$.

Item B : $x_2 = x_1 - 0{,}2$ ***Faux***

Pour 19 €, M. Dupont obtient 10 plants de tomates au prix de x_1 € et 20 plants de tournesols au prix de x_2 € donc $10x_1 + 20x_2 = 19$. Il vient alors le système :

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 & = & 19 & \\ 3x_1 + 5x_2 & = & 5 & (\times 4) \end{cases} \iff \begin{cases} 10x_1 + 20x_2 & = & 19 & (e_1) \\ 12x_1 + 20x_2 & = & 20 & (e_2) \end{cases}$$

$$(e_2) - (e_1) \implies 2x_1 = 1 \implies \boxed{x_1 = 0{,}5}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 & = & 19 & (\times 3) \\ 3x_1 + 5x_2 & = & 5 & (\times 10) \end{cases} \iff \begin{cases} 30x_1 + 60x_2 & = & 57 & (e_3) \\ 30x_1 + 50x_2 & = & 50 & (e_4) \end{cases}$$

$$(e_3) - (e_4) \implies 10x_2 = 7 \implies \boxed{x_2 = 0{,}7}$$

On constate alors que $\boxed{x_1 = x_2 - 0{,}2}$

Item C : *Le prix des plants de tomates, qui seront plantés sur la parcelle, est de βx^2.* ***Faux***

Rappelons que la parcelle de M. Dupont a une superficie $\mathscr{A}_1$ égale à $\left(a - \frac{\pi}{8}\right)x^2$. dans cette question, $a = 1{,}4$ et $\frac{\pi}{4} = 0{,}8$ donc la parcelle a une superficie (en m²) égale à :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \left(a - \frac{\pi}{8}\right)x^2 \\ &= \left(1{,}4 - \frac{\pi}{8}\right)x^2 \\ &= \left(1{,}4 - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}\right)x^2 \\ &= \left(1{,}4 - \frac{1}{2} \times 0{,}8\right)x^2 \\ &= (1{,}4 - 0{,}4)\,x^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, si M. Dupont plante β% de ses x^2 m² de terrain avec des tomates à raison de 4 plants par m² au prix de $x_1 = 0{,}5$ € le plant, le coût total en euros de l'opération sera de :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{100} \times x^2 \times 4 \times 0{,}5 &= \frac{2}{100}\beta x^2 \\ &= \boxed{0{,}02\beta x^2} \end{aligned}$$

Item D : *Si $x = 20$ et $\beta = 10$, le prix total que M. Dupont doit payer pour planter l'ensemble de sa parcelle est de 1 592 €.* ***Vrai***

On se place dans la situation où $x = 20$ et $\beta = 10$, alors la parcelle de M. Dupont a une surface totale $\mathscr{A}_1 = x^2 = 20^2 = 400\,\text{m}^2$.

Dressons un tableau récapitulatif de la situation de M. Dupont.

Nature du plant	*Superficie plantée*	*Rendement*	*Nombre de plants*	*Coût*
Tomates	10% de $\mathscr{A}_1$ soit $0{,}1 \times 400 = 40\,\text{m}^2$	4 plants / m^2	$4 \times 40 = 160$	$160 \times 0{,}5 = 80$ €
Tournesols	90% de $\mathscr{A}_1$ soit $0{,}9 \times 400 = 360\,\text{m}^2$	6 plants / m^2	$6 \times 360 = 2\,160$	$2160 \times 0{,}7 = 1512$ €

On constate alors que le prix total que M. Dupont doit payer pour planter l'ensemble de sa parcelle est $1\,512 + 80 = 1\,592$ €.

≡ Exercice 14 : FFVF

Dans cette question, on suppose que $a = 1{,}4$, $x = 100$ et $\dfrac{\pi}{4} = 0{,}8$. Calculons d'emblée la superficie $\mathscr{A}_1$ de la parcelle de M. Dupont : $\mathscr{A}_1 = \left(a - \dfrac{\pi}{8}\right) x^2 = (1{,}4 - 0{,}4) \times 100^2 = 10\,000\,\text{m}^2$.

Item A : *Si $p = 0{,}85$, alors le prix total de vente est inférieur à $8\,000y$.* ***Faux***

M. Dupont produit y L / m² sur sa parcelle de $10\,000\,\text{m}^2$.
Sa production totale est donc de 10 000y L qu'il vend au prix de 0,85 le litre.
Sa recette s'élève donc à $0{,}85 \times 10\,000y = 8\,500y\,€ > 8\,000y\,€$.

Item B : *Si $p = 3{,}5$, alors le bénéfice (par m²) est nul pour y égal à 3 et y égal à 6 litres.* ***Faux***

Le bénéfice (par m²) noté $B(y)$ est défini comme étant la différence entre le prix de vente égal à py et le coût de production égal à $C(y)$. On a donc :

$$\begin{aligned} B(y) &= py - C(y) \\ &= 3{,}5y - \left(0{,}25y^2 + y + 5{,}25\right) \\ &= 3{,}5y - 0{,}25y^2 - y - 5{,}25 \\ &= -0{,}25y^2 + 2{,}5y - 5{,}25 \end{aligned}$$

Cherchons pour quelle(s) valeur(s) de y, le bénéfice $B(y)$ s'annule :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2{,}5)^2 - 4 \times (-0{,}25) \times (-5{,}25) = 1 > 0 \text{ donc deux solutions}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} \quad y_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2{,}5 - \sqrt{1}}{2 \times (-0{,}25)} & \text{et} \quad &= \frac{-2{,}5 + \sqrt{1}}{2 \times (-0{,}25)} \\ &= 3 & \text{et} \quad &= 7 \end{aligned}$$

Le bénéfice est donc nul pour y égal à 3 et y égal à 7 litres.

Item C : *Si $p = 3{,}5$, alors le bénéfice (par m²) atteint son maximum pour y égal à 5 litres.* ***Vrai***

Dressons le tableau de variations de la fonction de bénéfice.

$$\begin{aligned} B'(y) &= -0{,}25 \times 2y + 2{,}5 \times 1 \\ &= -0{,}5y + 2{,}5 \end{aligned}$$

y	0		5		$+\infty$
$B'(y)$		$+$	0	$-$	
B		$\nearrow$	$B(5)$	$\searrow$	

$$\begin{aligned} B'(y) = 0 &\iff -0{,}5y + 2{,}5 = 0 \\ &\iff y = \frac{-2{,}5}{-0{,}5} \\ &\iff y = 5 \end{aligned}$$

On constate que le bénéfice atteint bien son maximum pour y égal à 5 litres.

Item D : *Si $p = 3{,}5$ et $y = 4$, alors le bénéfice total est égal à 5 000 €.* ***Faux***

Le bénéfice par m² dans le cas où $y = 4$ est $B(4) = -0{,}25 \times 4^2 + 2{,}5 \times 4 - 5{,}25 = 0{,}75\,€$. Comme la parcelle de M. Dupont fait $10\,000\,\text{m}^2$, son bénéfice total s'élève à $10\,000 \times 0{,}75 = 7\,500\,€$.

Exercice 15 : VFVF

Tâchons de de structurer les nombreuses informations :

	… tomates	… tournesols
Nombre de plants achetés avant récolte de …	n_1	n_2
Prix d'achat total des plants de …	$0{,}5n_1$ €	$0{,}7n_2$ €
Coût d'entretien des plants de …	$0{,}3n_1$ €	$0{,}3n_2$ €
Nombre de plants récoltés de …	$0{,}9n_1$ (10% de n_1 ne survit pas)	$0{,}8n_2$ (20% de n_2 ne survit pas)
Quantité totale de jus produite par les plants de …	$0{,}75 \times 0{,}9n_1$ litres	$0{,}5 \times 0{,}8n_2$ litres
Recette générée par la vente des jus de …	$2 \times 0{,}75 \times 0{,}9n_1 = 1{,}35n_1$ €	$3{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}8n_2 = 1{,}4n_2$ €

Item A : *Le coût total, noté C, est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut : $C(n_1\,;n_2) = 0{,}8n_1 + n_2 + 0{,}01n_1n_2 + 20$* ***Vrai***

Le coût total est :

$$\begin{aligned} C(n_1\,;n_2) &= \text{Prix d'achat} &&+ \text{Coût d'entretien} &&+ \text{Coût des engrais} &&+ \text{Coûts fixes} \\ &= 0{,}5n_1 + 0{,}7n_2 &&+ 0{,}3n_1 + 0{,}3n_2 &&+ 0{,}01 \times n_1 \times n_2 &&+ 20 \\ &= \boxed{0{,}8n_1 + n_2 + 0{,}01n_1n_2 + 20} \end{aligned}$$

Item B : *Le prix total des ventes, noté T, est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut : $T(n_1\,;n_2) = 1{,}5n_1 + 1{,}75n_2$* ***Faux***

La recette totale générée par la vente des jus en tenant compte des maladies et du climat est :

$$\boxed{T(n_1\,;n_2) = 1{,}35n_1 + 1{,}4n_2}$$

Item C : *Le bénéfice total, noté B, est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut : $B(n_1\,;n_2) = 0{,}55n_1 + 0{,}4n_2 - 0{,}01n_1n_2 - 20$* ***Vrai***

Le bénéfice total réalisé par la vente des jus en tenant compte des maladies et du climat est :

$$\begin{aligned} B(n_1\,;n_2) &= T(n_1\,;n_2) - C(n_1\,;n_2) \\ &= (1{,}35n_1 + 1{,}4n_2) - (0{,}8n_1 + n_2 + 0{,}01n_1n_2 + 20) \\ &= 1{,}35n_1 + 1{,}4n_2 - 0{,}8n_1 - n_2 - 0{,}01n_1n_2 - 20 \\ &= \boxed{0{,}55n_1 + 0{,}4n_2 - 0{,}01n_1n_2 - 20} \end{aligned}$$

➋ ***Item D :*** *Supposons que le nombre total des plants de tomates plantés au début de la saison est égal à celui des plants de tournesols. On peut en déduire que le bénéfice total sera positif lorsque le nombre total des plants plantés est compris entre 32 et 62.* ***Faux***

Si $n_1 = n_2 = x$ alors :

$$\begin{aligned} B(n_1\,;n_2) &= B(x) \\ &= 0{,}55x + 0{,}4x - 0{,}01x \times x - 20 \\ &= -0{,}01x^2 + 0{,}95x - 20 \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs de x pour lesquelles $B(x) = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0{,}95)^2 - 4 \times (-0{,}01) \times (-20) = 0{,}102\,5 > 0 \text{ donc deux solutions}$$

$$\begin{array}{rlcrl} x_1 &= \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} & x_2 &= \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \dfrac{-0{,}95-\sqrt{0{,}102\,5}}{2\times(-0{,}01)} & \text{et} & &= \dfrac{-0{,}95+\sqrt{0{,}102\,5}}{2\times(-0{,}01)} \\ &\simeq 63{,}5 & \text{et} & &\simeq 31{,}5 \end{array}$$

Dressons maintenant un tablau de signes pour déterminer sur quel intervalle $B(x) > 0$.

x	$-\infty$		$\simeq 31{,}5$		32		63		$\simeq 63{,}5$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, si M. Dupont plante entre 32 et 63 plants, son bénéfice total sera positif.