Concours ACCÈS 2021

Corrigé de l'épreuve de Raisonnement Logique et Mathématiques

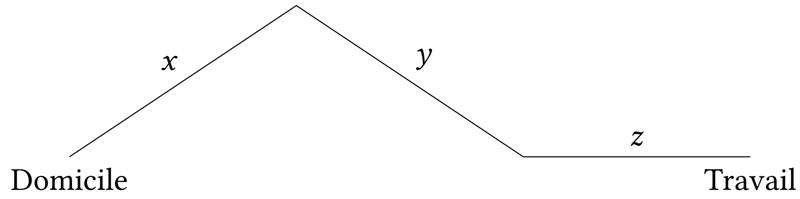
© *Mathieu Pons*
@ contact@mathete.net

Liste des exercices

Partie 1 - Raisonnement logique

≡ Exercice 1 : VFVF

Un rapide schéma permet de résumer et simplifier le trajet de Pierre. On note x, y et z les sommes respectives des montées, des descentes et des plats du parcours.



Les montées se font à 10 km/h, les descentes à 30 km/h et les plats à 15 km/h.

En utilisant la formule $v = \dfrac{d}{t} \iff t = \dfrac{d}{v}$, on peut découper le trajet de Pierre de la façon suivante :

- Dans le sens domicile-travail, le temps de parcours est donné par : $\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{30} + \dfrac{z}{15}$.
- Dans le sens travail-domicile, on a : $\dfrac{z}{15} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{x}{30}$.

On sait par ailleurs que Pierre a 2 heures de trajet aller-retour par jour, il vient donc l'égalité :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{10} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) + \left(\frac{z}{15} + \frac{y}{10} + \frac{x}{30}\right) = 2 &\iff \frac{x\times 3}{10\times 3} + \frac{y}{30} + \frac{z\times 2}{15\times 2} + \frac{z\times 2}{15\times 2} + \frac{y\times 3}{10\times 3} + \frac{x}{30} = \frac{2\times 30}{1\times 30} \\
&\iff 3x + y + 2z + 2z + 3y + x = 60 \\
&\iff 4x + 4y + 4z = 60 \\
&\iff \boxed{x + y + z = 15} \qquad \text{en divisant chaque membre par 4}
\end{aligned}$$

➋ *Item A : Vrai*

Si $x = y$, le temps à l'aller est : $\dfrac{x\times 3}{10\times 3} + \dfrac{y}{30} + \dfrac{z\times 2}{15\times 2} = \dfrac{3x}{30} + \dfrac{x}{30} + \dfrac{2z}{30} = \dfrac{4x + 2z}{30}$ heures.

Le temps au retour est : $\dfrac{z\times 2}{15\times 2} + \dfrac{y\times 3}{10\times 3} + \dfrac{x}{30} = \dfrac{2z}{30} + \dfrac{3x}{30} + \dfrac{x}{30} = \dfrac{4x + 2z}{30}$ heures.

➋ *Item B : Faux*

D'après l'égalité $x + y + z = 15$, la somme des kilomètres en montées, descentes et plats est égale à 15 et est donc inférieure à 16 kilomètres.

➋ *Item C : Vrai*

Si $x = 4$ et $y = 8$ alors il vient : $x + y + z = 15 \iff 4 + 8 + z = 15 \iff z = 3$.
A l'aller, Pierre effectue donc le trajet en un temps égal à :

$$\frac{4}{10} + \frac{8}{30} + \frac{3}{15} = \frac{12}{30} + \frac{8}{30} + \frac{6}{30} = \frac{26}{30} = \frac{52}{60} \text{ heures soit 52 minutes}$$

S'il met 52 minutes à l'aller, il mettra $120 - 52 = 68$ minutes au retour, soit 16 minutes de plus.

➋ *Item D : Faux*

Si $x = 5$ et $y = 7$ alors on a $x + y + z = 15 \iff 5 + 7 + z = 15 \iff z = 3$ et son temps de trajet sur le plat à l'aller est donc $\dfrac{3}{15} = \dfrac{12}{60}$ heures soit 12 minutes.

≡ EXERCICE 2 : VFVF

Posons les évenements suivants :

- S : « Pierre fait du sport » ;
- P : « Pierre postule pour une classe préparatoire » ;
- A : « Pierre a une activité associative ».

Et $\overline{S}$, $\overline{P}$, $\overline{A}$ leurs événements contraires associés.
Pour chaque déclaration de Pierre, **celui-ci ment une seule fois et une seule**. Nous allons donc faire la supposition qu'il ment sur un certain événement de sa première déclaration et observer la cohérence de son propos dans sa deuxième déclaration. Pierre affirme : $S - P - \overline{A}$ et $\overline{S} - \overline{A}$.

Scénario 1 : Supposons qu'il ment quand il dit qu'il fait du sport.

S	P	$\overline{A}$
Ment	Dit vrai	Dit vrai

alors

$\overline{S}$	$\overline{A}$
Dit vrai	Dit vrai

$\longrightarrow$ **impossible**

Scénario 2 : Supposons qu'il ment quand il dit qu'il postule pour une classe préparatoire.

S	P	$\overline{A}$
Dit vrai	Ment	Dit vrai

alors

$\overline{S}$	$\overline{A}$
Ment	Dit vrai

$\longrightarrow$ **possible**

Scénario 3 : Supposons qu'il ment quand il dit qu'il n'a pas d'activité associative.

S	P	$\overline{A}$
Dit vrai	Dit vrai	Ment

alors

$\overline{S}$	$\overline{A}$
Ment	Ment

$\longrightarrow$ **impossible**

La seule situation envisageable est donc celle du scénario 2 dans lequel Pierre :

- fait du sport ;
- ne postule pas pour une classe préparatoire car il ment quand il dit qu'il y postule ;
- n'a pas d'activité associative.

Soit les événements : $\boxed{S - \overline{P} - \overline{A}}$

➋ *Item A : Vrai*

D'après le scénario 2, si Pierre dit qu'il ne fait pas de sport et qu'il postule pour une classe préparatoire alors on a $\overline{S} - P$ et il ment effectivement deux fois.

➋ *Item B : Faux*

D'après le scénario 2, Pierre fait du sport.

➋ *Item C : Vrai*

D'après le scénario 2, Pierre fait effectivement du sport et n'a pas d'activité associative.

➋ *Item D : Faux*

D'après le scénario 2, Pierre ne postule pas pour une classe préparatoire.

≡ Exercice 3 : VVFV

Posons P_e, P_i et P_a les primes de transport respective de Perrine, Pierre et Paul et traduisons les affirmations de l'énoncé en équations.
La prime de Paul vaut 3 € de moins que 7 fois celle de Perrine se traduit par : $P_a = 7P_e - 3$.
La prime de Pierre vaut 14 € de moins que 3 fois celle de Paul se traduit par : $P_i = 3P_a - 14$.
La prime de Pierre vaut 13 € de plus que 12 fois celle de Perrine se traduit par : $P_i = 12P_e + 13$.
Il vient alors le système à résoudre :

$$\begin{cases} P_a = 7P_e - 3 \\ P_i = 3P_a - 14 \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases} \iff \begin{cases} P_a = 7P_e - 3 \\ 12P_e + 13 = 3P_a - 14 \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P_a - 7P_e = -3 \quad (e_1) \\ -3P_a + 12P_e = -27 \quad (e_2) \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P_a - 7P_e = -3 \\ -21P_e + 12P_e = -9 + (-27) \quad (3 \times e_1 + e_2) \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P_a - 7P_e = -3 \\ -9P_e = -36 \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P_a = 7 \times 4 - 3 \\ P_e = 4 \\ P_i = 12 \times 4 + 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P_a = 25 \\ P_e = 4 \\ P_i = 61 \end{cases}$$

Perrine, Pierre et Paul perçoivent donc des primes de transport mensuelle respectivement égales à 4 €, 61 € et 25 €.

❯ *Item A : Vrai*

La moyenne de la prime mensuelle de transport des trois salariés est de : $\dfrac{4+61+25}{3} = \dfrac{90}{3} = 30$ €.

❯ *Item B : Vrai*

La médiane est **la valeur centrale de la série ordonnée** des primes de transport soit : $4 - \boxed{25} - 61$.

❯ *Item C : Faux*

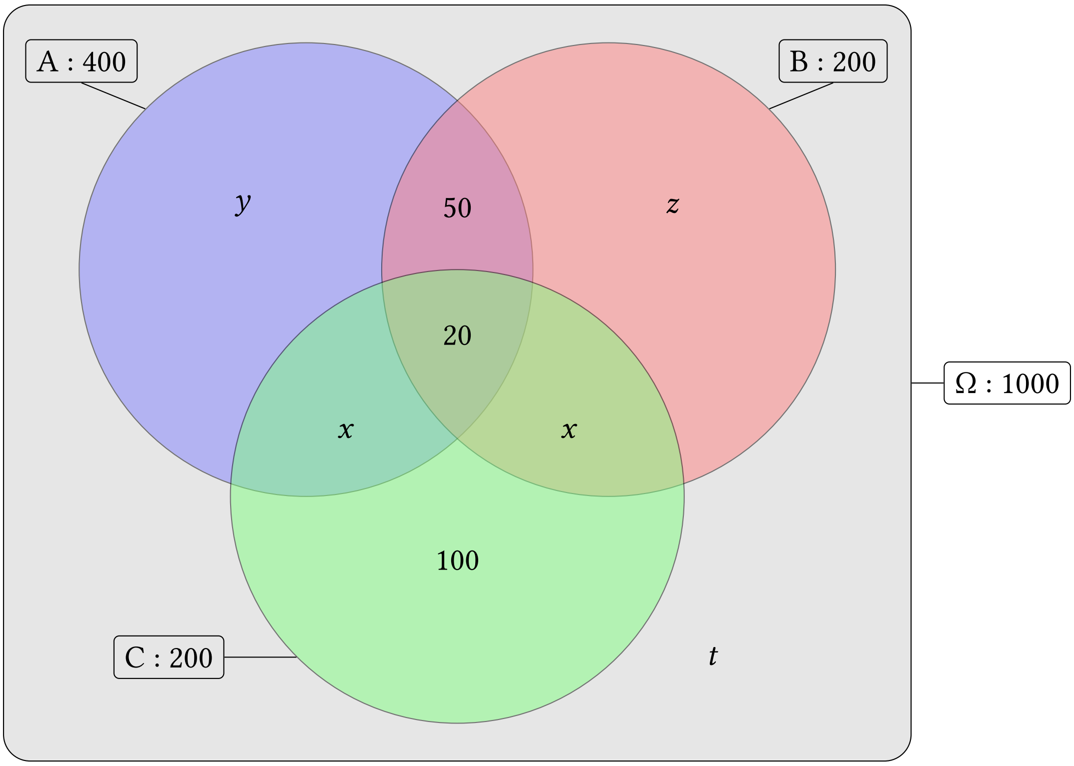
La prime mesuelle de transport de Perrine étant de 4 €, elle est donc inférieure à 5 €.

❯ *Item D : Vrai*

La prime mesuelle de transport de Pierre étant de 61 €, elle est bien supérieure à 60 €.

☰ Exercice 4 : FFFV

L'énoncé permet de construire le diagramme de Venn ci-dessous :



Item A : Faux

Le diagramme permet de poser l'équation : $x + 20 + x + 100 = 200 \iff 2x = 80 \iff \boxed{x = 40}$

Item B : Faux

Sachant que $x = 40$, on a : $50 + 20 + x + z = 200 \iff z = 200 - 50 - 20 - 40 \iff \boxed{z = 90}$.

Item C : Faux

Les salariés ayant suivis au moins deux formations, c'est-à-dire deux ou trois, sont au nombre de : $x + 50 + x + 20 = 40 + 50 + 40 + 20 = \boxed{150}$.

Item D : Vrai

Déterminons y : $y + 50 + 20 + x = 400 \iff y = 400 - 50 - 20 - 40 \iff \boxed{y = 290}$.

Le nombre de salariés t n'ayant suivi aucune formation est donc :

$$\begin{aligned} t = 1000 - (y + 50 + z + 20 + x + x + 100) &\iff t = 1000 - (290 + 50 + 90 + 20 + 2 \times 40 + 100) \\ &\iff t = \boxed{370} \end{aligned}$$

≡ Exercice 5 : VVFV

Un code de carte bleue est une liste de 4 éléments choisis parmi 10 chiffres de 0 à 9 avec répétitions possibles. Le nombre total de listes possibles est donc de $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$.

Item A : Vrai

Si le code est un nombre divible par 5 alors son dernier chiffre est un 0 ou un 5. On peut donc choisir :

- le premier chiffre parmi 10 possibilités (chiffre de 0 à 9) ;
- le deuxièmre chiffre parmi 10 possibilités ;
- le troisième chiffre parmi 10 possibilités ;
- le quatrième chiffre en revanche ne peut être choisi que parmi 2 possibilités (le 0 ou le 5).

Il y a donc $10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2\,000$ combinaisons possibles.

Item B : Vrai

La plage de codes possibles s'étend de 0000 à 9999. Un nombre pair étant un nombre divisible par 2, 0000 est donc un nombre pair et il y a bien $\dfrac{10\,000}{2} = 5\,000$ nombres pairs et $5\,000$ nombres impairs.

Item C : Faux

Si le voleur sait que les deux premiers chiffres sont identiques alors on peut choisir :

- le premier chiffre parmi 10 possibilités (chiffre de 0 à 9) ;
- le deuxièmre en revanche doit être identique au premier donc il n'y a qu'une seule et unique possibilité ;
- le troisième parmi 10 possibilités ;
- le quatrième parmi 10 possibilités.

Il y a donc $10 \times 1 \times 10 \times 10 = 1\,000$ combinaisons possibles.

Item D : Vrai

Si le voleur connaît un chiffre du code et son emplacement exacte alors les codes deviennent pour lui des combinaisons avec répétitions de 3 éléments choisis parmi 10 et le nombre de codes possibles se réduit à $10^3 = 1\,000$.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

≡ Exercice 6 : VFVV

Soit la fonction f définie par : $\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$.

➜ *Item A : Vrai*

Cherchons la valeur interdite de f. Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$. Par conséquent $f(x)$ est définie pour tout réel x différent de 1.

➜ *Item B : Faux*

$$\begin{aligned}
f(x)=4 &\iff \frac{x^2-4x+3}{x-1} = -4 \\
&\iff x^2-4x+3 = -4(x-1) \quad \text{avec } x \neq 1 \\
&\iff x^2 \cancel{-4x} + 3 = \cancel{-4x} + 4 \\
&\iff x^2-1 = 0 \\
&\iff (x-1)(x+1) = 0 \\
&\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1
\end{aligned}$$

Or $x=1$ est une valeur interdite donc l'équation $f(x)=-4$ admet une seule et unique racine qui est 1.

➜ *Item C : Vrai*

Étudions les variations de la fonction f. Pour cela, dérivons $f(x)$ en utilisant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Pour tout x différent de 1, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(x^2-4x+3\right)'(x-1)-(x^2-4x+3)\,(x-1)'}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+3)\times 1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-3}{(x-1)^2} \\
&= \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

➜ *Item D : Vrai*

Cherchons à factoriser x^2-4x+3. Pour cela, on calcule le discriminant du polynôme :

$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times 1\times(-3) = 16-12 = 4 > 0$. On a donc :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$

On obtient alors la factorisation $x^2 - 4x + 3 = a(x-x_1)(x-x_2) = (x-1)(x-3)$.

Par conséquent, on a pour tout x différent de 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-4x+3}{x-1} \\ &= \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{x-1}} \\ &= \boxed{x-3} \end{aligned}$$

☰ Exercice 7 : VFFF

➜ *Item A : Vrai*

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ et $\mathrm{e} - 2 > 0$ donc on peut faire apparaître les valeurs d'annulations de la fonction f dans le tableau de variations :

x	0		α		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		β		e		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	||			$-$	0	$+$			0		$-$		0	$+$	
f	|| 7	↘	0	↘	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	0	↗	3	↘	$f(3)$	↘	$\mathrm{e}-2$	↗	2

L'équation $f(x) = 0$ admet donc bien deux solutions réelles distinctes α et β.

➜ *Item B : Faux*

D'après le tableau de variations, 0 est une valeur interdite de la fonction car on observe une double barre en 0. Par conséquent $f(0)$ n'existe pas car f n'est pas définie en 0. En revanche, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 7$.

➜ *Item C : Faux*

L'équation de la tangente en 3 est donné par la formule $y = f'(3)(x-3) + f(3)$. **On retiendra une notion fondamentale qui est évaluée à chaque session du concours** et qu'il faut donc en permanence garder à l'esprit : c'est que le coefficient directeur de cette tangente est $f'(3)$.
D'après le tableau de signes de la dérivée $f'(x)$, on note que $f'(3) < 0$ puisque $\mathrm{e} < 3 < 5$ et il est donc impossible que $f'(3) = 2$.

➜ *Item D : Faux*

D'après le tableau de variations, pour tout réel $x \in]\alpha\,;\beta[$, $f(x) < 0$.

≡ Exercice 8 : VVVF

Item A : Vrai

$f(x)$ existe si et seulement si $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} > 0$ car $\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$. Or $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ est du signe de $e^x - 1$ car $e^x + 1$ est toujours positif :

$$\begin{aligned} e^x - 1 > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff \ln e^x > \ln 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[}$.

On peut aussi dresser un tableau de signes pour déterminer sur quel intervalle la quantité $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ est strictement positive.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$e^x + 1$		$+$		$+$	
$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$		$-$	0	$+$	

C'est sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ que $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ est strictement posirive, par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[}$.

Item B : Vrai

On utilise ici conjointement les formules $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

On obtient alors pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'}{\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)} \\ &= \frac{\dfrac{(e^x-1)'(e^x+1) - (e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}}{\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)} \\ &= \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} \times \frac{e^x+1}{e^x-1} \\ &= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)\cancel{(e^x+1)}} \times \frac{\cancel{e^x+1}}{e^x-1} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} \\ &= \boxed{\frac{2e^x}{e^{2x}-1}} \end{aligned}$$

Item C : Vrai

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} e^x - 1 < e^x + 1 &\iff \frac{e^x - 1}{e^x + 1} < 1 \\ &\iff \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) < \ln(1) \\ &\iff f(x) < 0 \end{aligned}$$

Item D : Faux

D'après le résultat précédent, l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution puisque $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

≡ Exercice 9 : FFVV

Item A : Faux

$\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$. Or $e^x + e^{-x} > 0$ pour tout réel x, par conséquent : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[}$.

Item B : Faux

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{e^x + (-1) \times e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \boxed{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \end{aligned}$$

Item C : Vrai

Par définition, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est le nombre dérivé $f'(a)$. Or :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \\ &= \frac{e^{-a}\left(\dfrac{e^a}{e^{-a}} - 1\right)}{e^{-a}\left(\dfrac{e^a}{e^{-a}} + 1\right)} \\ &= \frac{\cancel{e^{-a}}\left(e^{a-(-a)} - 1\right)}{\cancel{e^{-a}}\left(e^{a-(-a)} + 1\right)} \\ &= \boxed{\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}} \end{aligned}$$

Item D : Vrai

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si et seulement si f est une fonction paire c'est-à-dire si on a $f(-x) = f(x)$.
Vérifions :

$$f(-x) = \ln\left(e^{(-x)} + e^{-(-x)}\right) = \ln\left(e^{-x} + e^{+x}\right) = f(x)$$

Donc f est paire et sa courbe représentative admet bien l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

≡ Exercice 10 : VVFV

Item A : Vrai

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 1) \\ &= 1 - (1-p)^{1-1} \times p \\ &= 1 - (1-p)^0 \times p \qquad \text{avec } a^0 = 1 \\ &= 1 - 1 \times p \\ &= \boxed{1 - p} \end{aligned}$$

Item B : Vrai

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (1-p)^0 \times p + (1-p)^1 \times p \\ &= 1 \times p + (1-p) \times p \qquad \text{on factorise par } p \\ &= p\,(1 + 1 - p) \\ &= \boxed{p\,(2-p)} \end{aligned}$$

Item C : Faux

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq n+1) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = n+1) \\ &= (1-p)^0 \times p + (1-p)^1 \times p + (1-p)^2 \times p + \ldots + (1-p)^n \times p \qquad \text{on factorise par } p \\ &= p \underbrace{\left(1 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \ldots + (1-p)^n\right)}_{\text{somme de } n+1 \text{ termes d'une suite géométrique de raison } 1-p} \\ &= \boxed{p\left(1 \times \frac{1-(1-p)^{n+1}}{1-p}\right)} \end{aligned}$$

Item D : Vrai

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{2}P(X = 2) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\,(1-p)\,p + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(p - p^2\right) + 1 \\ &= \boxed{-\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + 1} \end{aligned}$$

$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$

Donc f admet bien deux racines distinctes.

Partie 3 - Problème mathématique

≡ Exercice 11 : VVFV

Item A : Vrai

Mois	x - Numéro du mois	y - Quantité vendue en tonnes
Janvier	1	$103 = 3 \times 1 + 100$
Février	2	$106 = 3 \times 2 + 100$
Mars	3	$109 = 3 \times 3 + 100$
Avril	4	$112 = 3 \times 4 + 100$
Mai	5	$115 = 3 \times 5 + 100$
Juin	6	$118 = 3 \times 6 + 100$

On constate effectivement que $y = 3x + 100$.

Item B : Vrai

Le numéro du mois de décembre étant $x = 12$ et en utlisant la fonction mis en évidence précédemment, on obtient que la quantité de clous vendue en décembre est bien de $f(12) = 3 \times 12 + 100 = 136$ tonnes.

Item C : Faux

Au début du mois de juillet, on considére que la quantité de clous vendue est celle de fin juin, soit 118 tonnes. À fin décembre, la quantité vendue est celle du mois de décembre, soit 136 tonnes. La variation de la quantité vendue entre ces deux dates est donc :

$$\begin{aligned} \frac{V_a - V_d}{V_d} \times 100 &= \frac{136 - 118}{118} \times 100 \\ &\approx \boxed{+15{,}3\%} \neq 20\% \end{aligned}$$

Item D : Vrai

Sur les six derniers mois de l'année, la moyenne des ventes mensuelles est de :

$$\frac{121 + 124 + 127 + 130 + 133 + 136}{6} = \boxed{128{,}5} > 125 \text{ tonnes}$$

≡ Exercice 12 : FVVV

➜ *Item A : Faux*

$$\begin{aligned}
Y(1) &= F(1{,}5) - F(0{,}5) \\
&= \left(\frac{3}{2} \times 1{,}5^2 + 100 \times 1{,}5\right) - \left(\frac{3}{2} \times 0{,}5^2 + 100 \times 0{,}5\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(1{,}5^2 - 0{,}5^2\right) + 150 - 50 \\
&= \frac{3}{2}(1{,}5 - 0{,}5)(1{,}5 + 0{,}5) + 100 \\
&= \frac{3}{\cancel{2}} \times 1 \times \cancel{2} + 100 \\
&= \boxed{103}
\end{aligned}$$

➜ *Item B : Vrai*

$$\begin{aligned}
Y(2) &= F(2{,}5) - F(0{,}5) \\
&= \left(\frac{3}{2} \times 2{,}5^2 + 100 \times 2{,}5\right) - \left(\frac{3}{2} \times 0{,}5^2 + 100 \times 0{,}5\right) \\
&= 209
\end{aligned}$$

Et $Y(2) - Y(1) = 209 - 103 = \boxed{106}$

➜ *Item C : Vrai*

$Y(m)$ représente la quantité totale vendue du 1$^{\text{er}}$ au $m^{\text{ième}}$ mois. Ainsi, durant l'année écoulée, l'entreprise a vendu une quantité de clous égale à :

$$Y(12) = 103 + 106 + 109 + \ldots + 136 = \boxed{1\,434 \text{ tonnes}}$$

Que l'on peut également calculer avec la formule précédente :

$$\begin{aligned}
Y(12) &= F(12{,}5) - F(0{,}5) \\
&= \left(\frac{3}{2} \times 12{,}5^2 + 100 \times 12{,}5\right) - \left(\frac{3}{2} \times 0{,}5^2 + 100 \times 0{,}5\right) \\
&= \boxed{1\,434}
\end{aligned}$$

➜ *Item D : Vrai*

Chaque kilogramme de clous étant vendu 1 € soit 1 000 € la tonne, le montant total des ventes pour l'année écoulée est donc de $1\,434 \times 1\,000 = 1\,434\,000$ € qui est bien supérieur à 1 400 000 €.

≡ Exercice 13 : VVFVV

On définit la notion d'*élasticité-prix* notée E par :

$$E = \frac{\frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}}}{\frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}}} \qquad \text{où } Q \text{ est la quantité et } P \text{ le prix}$$

➋ *Item A : Vrai*

On calcule d'abord la quantité attendue si l'entreprise n'avait pas modifié son prix. En janvier de l'année suivante (13ième mois de l'étude), elle aurait pu vendre $f(13) = 3 \times 13 + 100 = 139$ tonnes de clous. Or elle n'en a vendu que 111,2 tonnes suite à son augmentation de prix. La variation relative de la demande est donc de :

$$\frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} = \frac{111{,}2 - 139}{139} = -0{,}2 \text{ soit } -20\%$$

➋ *Item B : Vrai*

Calculons la variation relative du prix :

$$\frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} = \frac{1{,}1 - 1}{1} = 0{,}1$$

L'élasticité-prix est donc $E = \dfrac{-0{,}2}{0{,}1} = -2$.

➋ *Item C : Faux*

Sans augmentation de son prix, l'entreprise aurait vendu 139 tonnes de clous à 1 000 € la tonne et aurait donc réalisé un chiffre d'affaires de $139 \times 1\,000 = 139\,000$ € au mois de janvier.
Ayant augmenté son prix, elle ne vend plus que 111,2 tonnes de clous à 1 100 € la tonne et son chiffre d'affaires est désormais de $111{,}2 \times 1{,}1 = 122\,320$ €.
Si elle n'avait pas augmenté son prix, son chiffre d'affaires aurait donc été supérieur de
$139\,000 - 122\,320 = 16\,680$ € qui est inférieur à 27 800.

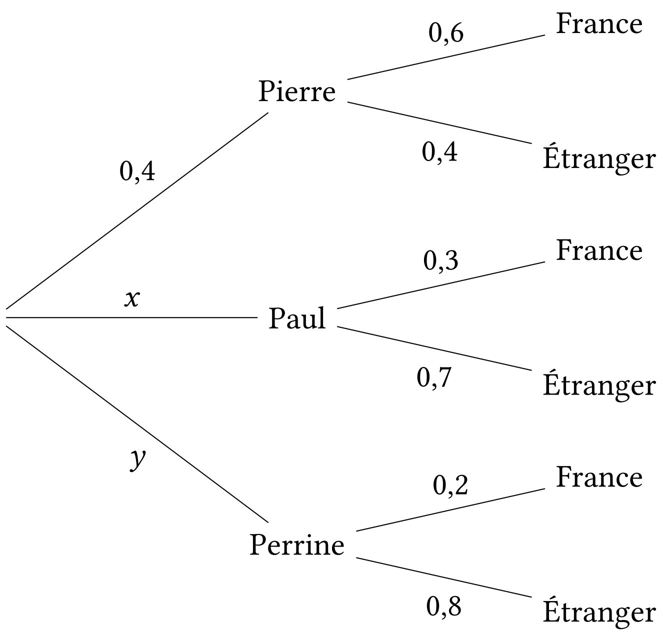
➋ *Item D : Vrai*

$$E > 0 \iff \begin{cases} \dfrac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} > 0 \quad \text{ET} \quad \dfrac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} > 0 \\ \text{OU} \\ \dfrac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} < 0 \quad \text{ET} \quad \dfrac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} < 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $E > 0$ et si P_{vendu} augmente alors $\dfrac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} > 0$ et par conséquent on doit avoir $\dfrac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} > 0$. Pour cela, il faut que $Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}} > 0$ c'est-à-dire $Q_{\text{vendue}} > Q_{\text{attendue}}$.

☰ Exercice 14 : VVFV

Dressons un arbre de probabilités de la situation :



Item A : Vrai

On sait que les 80% des quantités vendues par Perrine à l'étranger représentait 20% des quantités totales vendues par l'entreprise, ce qui signifie que :

$$0,8 \times y = 0,2 \iff y = \frac{0,2}{0,8} \iff y = 0,25$$

On a alors $x = 1 - 0,25 - 0,4 = 0,35$. Paul a par conséquent vendu 35% des quantités totales vendues par l'entreprise.

Item B : Vrai

Sur le marché français, Pierre a vendu $0,4 \times 0,6 = 0,24$ soit 24% des quantités totales de l'entreprise. Sur le marché étranger, Perrine a vendu $0,25 \times 0,8 = 0,2$ soit 20% des quantités totales de l'entreprise. Pierre a donc vendu plus de clous que Perrine sur le marché étranger.

Item C : Faux

En France, l'entreprise a vendu $0,4 \times 0,6 + 0,35 \times 0,3 + 0,25 \times 0,2 = 0,395$ soit 39,5% de sa production de clous et par conséquent elle en a vendu 60,5% à l'étranger. Elle a donc vendu plus de clous sur le marché étranger qu'en France.

Item D : Vrai

Parmi l'ensemble des clous vendus à l'étranger, Perrine en a vendu une proportion égale à :

$$p_{\text{Étranger}}(\text{Perrine}) = \frac{p\left(\text{Perrine et Étranger}\right)}{p\left(\text{Étranger}\right)} = \frac{0,25 \times 0,8}{0,605} \approx 0,330\,6 < \frac{1}{3}$$

≡ Exercice 15 : FFFF

Item A : Faux

On sait que $Fixe_{Pierre}$ est 20% plus élevé que $Fixe_{Paul}$ c'est-à-dire $Fixe_{Pierre} = 1{,}2 \times Fixe_{Paul}$:

$$\begin{aligned} Salaire_{Pierre} &= Fixe_{Pierre} + (Ventes\_Totales_{Pierre} \times \alpha) \\ &= 1{,}2 \times Fixe_{Paul} + (350 + 250) \times 40 \\ &= 1{,}2 \times 10\,000 + 600 \times 40 \\ &= \boxed{36\,000\,€} \end{aligned}$$

Item B : Faux

On sait que $Salaire_{Pierre} = Salaire_{Paul}$ et en notant (e) l'égalité :

$$Salaire_{Paul} = Fixe_{Paul} + (Ventes\_France_{Paul} \times \alpha) + (Ventes\_Etranger_{Paul} \times \beta)$$

On peut isoler β dans (e) :

$$\begin{aligned} (e) &\iff Salaire_{Paul} - Fixe_{Paul} - (Ventes\_France_{Paul} \times \alpha) = (Ventes\_Etranger_{Paul} \times \beta) \\ &\iff \beta = \frac{Salaire_{Paul} - Fixe_{Paul} - (Ventes\_France_{Paul} \times \alpha)}{Ventes\_Etranger_{Paul}} \\ &\iff \beta = \frac{Salaire_{Pierre} - 10\,000 - 150 \times 40}{400} \\ &\iff \beta = \frac{36\,000 - 10\,000 - 6\,000}{400} \\ &\iff \boxed{\beta = 50} \end{aligned}$$

Item C : Faux

Si $Fixe_{Perrine} = 15\,000$ alors :

$$\begin{aligned} Salaire_{Perrine} &= Fixe_{Perrine} + \left(Ventes\_France_{Perrine} \times 0{,}1 \times \alpha^2\right) + (Ventes\_Etranger_{Perrine} \times \beta) \\ &= 15\,000 + 50 \times 0{,}1 \times 40^2 + 300 \times 50 \\ &= \boxed{38\,000\,€} \end{aligned}$$

Le salaire de Perrine est par conséquent différent de celui de Paul, ce dernier étant le même que Pierre à savoir 36 000 €.

Item D : Faux

Si $Fixe_{Perrine} = 3\,000$ et $\alpha_{Perrine} = 66$ alors :

$$\begin{aligned} Salaire_{Perrine} &= Fixe_{Perrine} + \left(Ventes\_France_{Perrine} \times 0{,}1 \times \alpha^2\right) + (Ventes\_Etranger_{Perrine} \times \beta) \\ &= 3\,000 + 50 \times 0{,}1 \times 66^2 + 300 \times 50 \\ &= \boxed{39\,780\,€} \neq Salaire_{Pierre} \end{aligned}$$