Concours ACCÈS 2019

Corrigé de l'épreuve de Raisonnement Logique et Mathématiques

© *Mathieu Pons*
@ contact@mathete.net

Liste des exercices

Partie 1 - Raisonnement logique

≡ Exercice 1 : FVFF

L'affirmation : « Il arrive qu'Alain amène des croissants à ses collègues quand il arrive en retard à son travail le lundi matin » signifie que si Alain est en retard le lundi matin alors il est possible que celui-ci amène des croissants à ses collègues. En effet, le terme "il arrive" ne permet pas d'affirmer avec certitude qu'il en amène à chaque fois qu'il est en retard.
Autrement dit, si Alain est en retard alors il peut amener des croissants ou ne pas en amener, on ne sait pas. Et s'il n'est pas en retard alors rien dans l'énoncé ne nous permet d'affirmer s'il en amène ou pas.

Item A : Faux

Si Alain n'a pas amené de croissants à ses collègues alors rien ne permet d'affirmer qu'il ait été en retard ou pas.

Item B : Vrai

En effet, s'il n'a pas amené de croissants, il pouvait être à l'heure ou en retard, on ne peut pas le savoir, donc il est peut-être arrivé en retard.

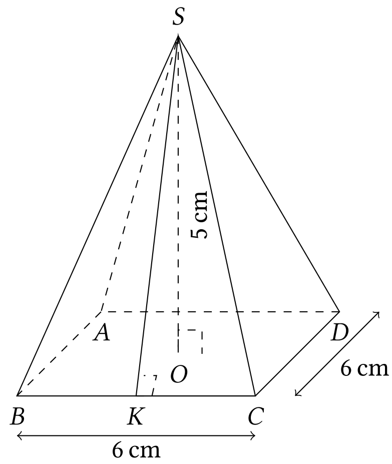
Item C : Faux

Rien dans l'énoncé ne permet d'affirmer qu'il est "souvent en retard".

Item D : Faux

Rien dans l'énoncé ne permet d'affirmer qu'il est en retard "au moins une fois par mois".

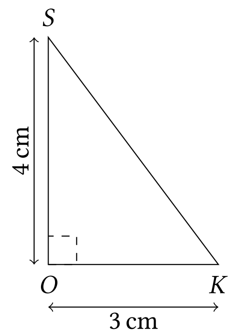
≡ Exercice 2 : VFVF



Sur la figure ci-contre qui reprend celle de l'énoncé, on démontre que $(SK) \perp (BC)$ car le triangle SBC étant isocèle (pyramide régulière), la droite (SK) est à la fois la médiane et la hauteur issue de S.
Nous avons donc $AB = BC = CD = DA = 6\,\text{cm}$, $SO = 4\,\text{cm}$ et $KO = KC = 3\,\text{cm}$

➋ *Item A : Vrai*

Nous cherchons l'apothème de cette pyramide qui est le segment [SK]. Pour cela, on utilisa le théorème de Pythagore dans le triangle SKO rectangle en O.



$$\begin{aligned} SK &= \sqrt{OK^2 + OS^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\,\text{cm} \end{aligned}$$

➋ *Item B : Faux*

La surface totale noté $\mathcal{S}$ de cette pyramide est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{A}_{\text{base}} + 4 \times \mathcal{A}_{\text{face}} \\ &= \mathcal{A}_{\text{carré}} + 4 \times \mathcal{A}_{\text{triangle isocèle}} \\ &= BC^2 + 4 \times \frac{SK \times BC}{2} \\ &= 6^2 + 2 \times \cancel{2} \times \frac{5 \times 6}{\cancel{2}} \\ &= 36 + 2 \times 30 = \boxed{96\,\text{cm}^2} \end{aligned}$$

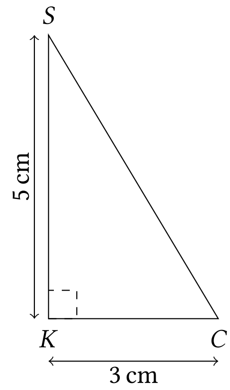
➋ *Item C : Vrai*

Le volume noté $\mathcal{V}$ de cette pyramide est :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times SO}{3} \\ &= \frac{36 \times 4}{3} \\ &= \boxed{48\,\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Item D : Faux

L'arête de cette pyramide est le segment [SC] dont on calcule la mesure en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle SKC rectangle en K.



$$\begin{aligned} SC &= \sqrt{KS^2 + KC^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34} < \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

≡ Exercice 3 : FFVV

On pose x le nombre d'unités de produits 1 achetées par le commerçant et p le prix unitaire du produit 2.

❯ *Item A : Faux*

On peut mettre le problème en équations à la lecture de l'énoncé :

- « Un commerçant achète chez son fournisseur une certaine quantité de produit 1 au prix unitaire annoncé de 200 €. Il achète aussi 50 produits 2. Le montant total s'élève à 25 000 € » se traduit par :

$$200x + 50p = 25\,000 \overset{\div 10}{\iff} 20x + 5p = 2\,500 \overset{\div 5}{\iff} \boxed{4x + p = 500} : ①$$

- « il obtient une réduction de 10 % sur le prix des produits 1 et 20 % sur le prix des produits 2. Ceci lui permet de diminuer sa facture de 3 000 € » se traduit par :

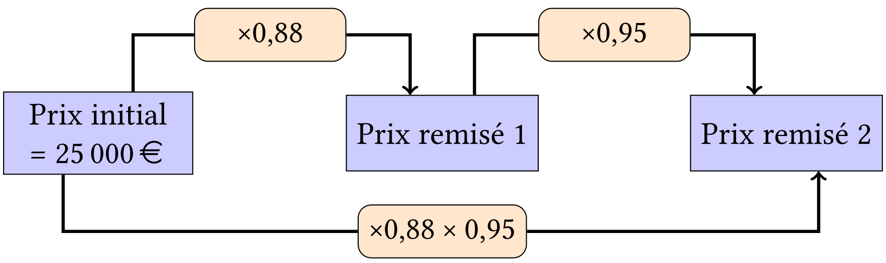
$$0{,}1 \times 200x + 50 \times 0{,}2p = 3\,000 \iff 20x + 10p = 3\,000 \overset{\div 10}{\iff} \boxed{2x + p = 300} : ①$$

Il vient alors par : ① − ② $\iff 2x = 200 \iff \boxed{x = 100}$.
Le commerçant a donc commandé 100 unités de produits 1 contre 50 unités de produits 2. Produit 2 dont le prix unitaire s'élève à $2 \times 100 + p = 300 \iff \boxed{p = 100\,€}$.

❯ *Item B : Faux*

La facture initiale était de 25 000 € mais le commerçant s'est vu octroyé une première remise de 3 000 € soit $\dfrac{3\,000}{25\,000} \times 100 = \dfrac{300}{25} = 12\,\%$. Il obtient ensuite une ristourne supplémentaire de 5 %.
Par conséquent, on peut calculer le coefficient multiplicateur global permettant de passer du prix initial au prix final en utlisant les coefficients multiplicateurs intermédiaires correspondant à :

- la première remise de 12 % soit $CM_1 = 1 - \dfrac{12}{100} = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$;
- la deuxièmre remise de 5 % soit $CM_2 = 1 - \dfrac{5}{100} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.



On alors un coefficient multiplicateur global noté CM_g égale à :

$$CM_g = 0{,}88 \times 0{,}95 = \frac{88}{100} \times \frac{95}{100} = \frac{11 \times \cancel{4} \times \cancel{2} \times 19 \times \cancel{5}}{\cancel{4} \times 25 \times \cancel{5} \times \cancel{2} \times 10} = \frac{11 \times (10 + 9)}{250} = \frac{110 + 99}{250} = \frac{209}{250}$$

Coefficient correspondant à un taux d'évolution t en pourcentage égale à :

$$t = \left(\frac{209}{250} - 1\right) \times 100 = \frac{-41}{250} \times 100 = \frac{-4100}{250} = \frac{-410}{25} = \frac{-400}{25} - \frac{10}{25} = -16 - \frac{2 \times \cancel{5}}{5 \times \cancel{5}} = \boxed{-16{,}4\,\%}$$

➋ *Item C : Vrai*

Par rapport aux prix initiaux annoncés par le fournisseur, le commerçant a vendu ses 50 produits 2 10 % plus cher . Il les a donc vendu au prix unitaire de $1{,}1 \times 100 = 110$ € et a engrangé une recette de $110 \times 50 = 5\,500$ €.

Pour ce qui concerne le produit 1, il en a vendu 50 au prix initial de 200 € et 50 au prix de $1{,}2 \times 200 = 240$ €, soit une recette de $50 \times 200 + 50 \times 240 = 10\,000 + 12\,000 = 22\,000$ €.

La recette totale de la vente s'élève donc bien à $5\,500 + 22\,000 = 27\,500$ €.

➋ *Item D : Vrai*

Pour calculer le bénéfice réalisé par le commerçant, il faut calculer le coût d'achat des produits. Nous avons vu précédemment que le commerçant à obtenu une remise de 16,4 % sur sa facture de 25 000 €. Le coût d'achat noté C des poduits au fournisseur s'élève donc à :

$$\begin{aligned} C &= 25\,000 \times CM_g \\ &= 25\,000 \times \frac{209}{250} \\ &= \cancel{250} \times 100 \times \frac{209}{\cancel{250}} \\ &= \boxed{20\,900\text{ €}} \end{aligned}$$

Le pourcentage de marge noté t_m du commerçant est alors :

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{\text{bénéfice}}{\text{montant de la facture}} \times 100 \\ &= \frac{\text{recette} - \text{coût}}{\text{montant de la facture}} \times 100 \\ &= \frac{27\,500 - 20\,900}{20\,900} \times 100 \\ &= \frac{6\,600}{20\,900} \times 100 \\ &= \frac{6\,600}{209} \end{aligned}$$

Or on constate (en posant la multiplication "à la main") que $209 \times 25 = 5225$ donc on peut écrire :

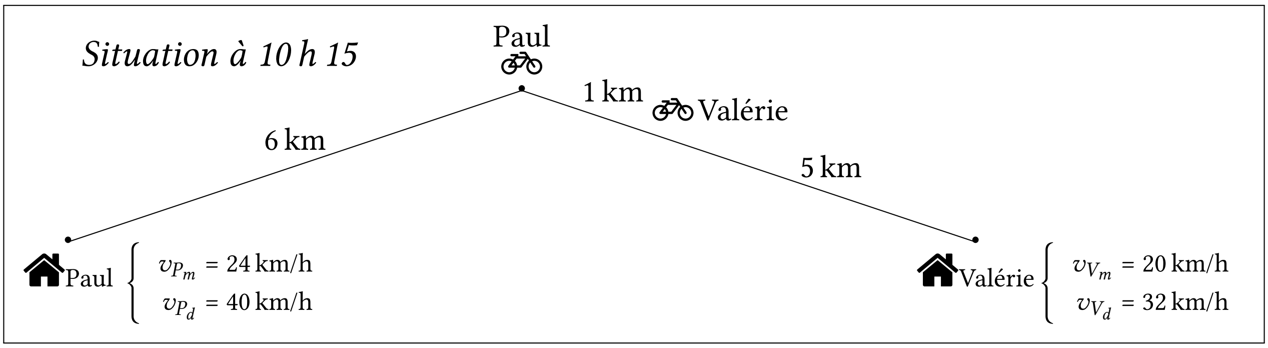
$$\begin{aligned} t_m &= \frac{6\,600}{209} \\ &= \frac{5\,225}{209} + \frac{1\,375}{209} \\ &= \boxed{25 + \frac{1\,375}{209} > 25\,\%} \end{aligned}$$

☰ Exercice 4 : VFFF

Item A : Vrai

Paul roulant plus vite en montée que Valérie, il arrive le premier au sommet au bout d'un temps égale à $t = \dfrac{d}{v_{Pm}} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$ d'heure soit 15 minutes.

Pendant ce temps t, Valérie a parcouru une distance $d = v_{Vm} \times t = 20 \times \dfrac{1}{4} = 5$ km.



Par conséquent, Valérie se trouve à 1 km du sommet de la colline et Paul aura donc bien parcouru entre 6 et 7 km avant qu'ils se rencontrent.

Item B : Faux

D'après les résultats précédents, il est 10 h 15 lorsque Paul se trouve au sommet de la colline, à une distance de $D = 1$ km de Valérie.

Ce dernier kilomètre qui les sépare, Paul va le parcourir à une vitesse de 40 km/h car il est en descente, et Valérie à une vitesse de 20 km/h car elle est toujours en montée.

Au moment où ils se rencontrent, leur temps de parcours commun noté t est la solution d'une équation dans laquelle la somme de leur distance respective parcourue est égale à la distance totale qui les sépare, soit :

$$\begin{aligned} d_P + d_V = D &\iff v_{Pd} \times t + v_{Vm} \times t = 1 \\ &\iff 40t + 20t = 1 \\ &\iff 60t = 1 \\ &\iff t = \frac{1}{60} \text{ h soit 1 minute} \end{aligned}$$

Par conséquent, il est 10 h 15 passé de 1 minute lorsque Paul et Valérie se rencontre, soit 10 h 16.

Item C : Faux

Lorsqu'ils se rencontrent à 10 h 16, ils ont chacun passé 16 min sur leur vélo.

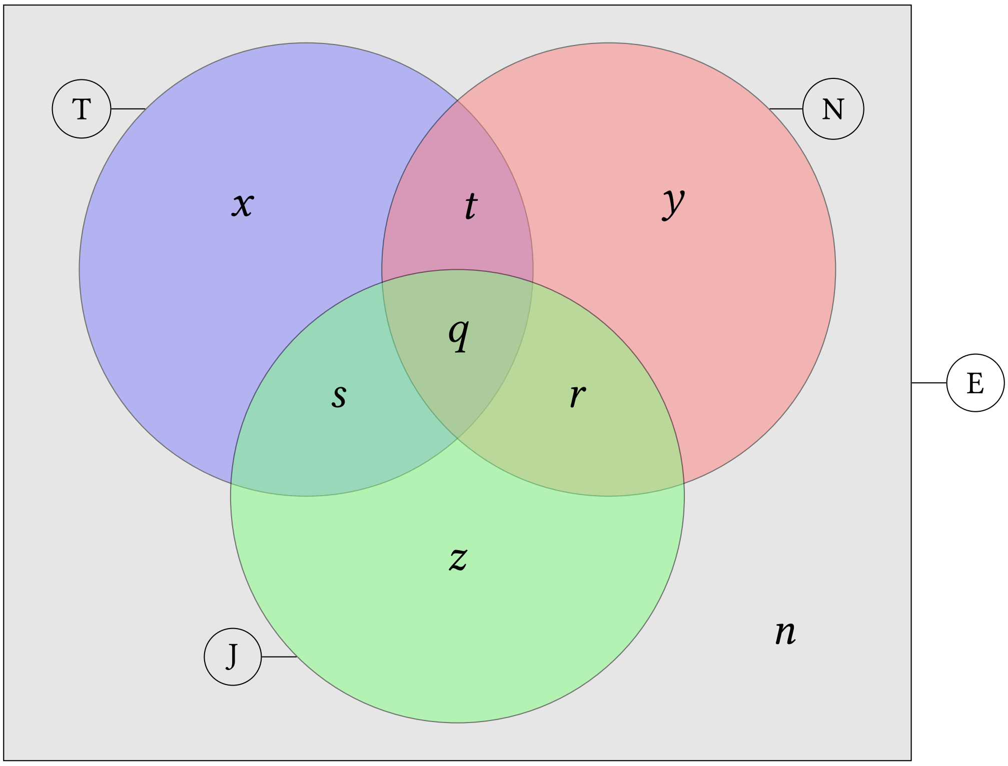
Item D : Faux

Valérie met un temps $t = \dfrac{d}{v_{Vm}} = \dfrac{6}{20} \times \dfrac{3}{3} = \dfrac{18}{60}$ h soit 18 minutes pour atteindre le sommet.

Par conséquent, si elle veut arriver au sommet à 10 h 15 en même temps que Paul, elle doit partir à 9 h 57 (car 9 h 57 + 18 min = 10 h 15).

≡ Exercice 5 : VVFV

Notons T, N, J l'ensemnble des élèves pratiquant respectivement le tennis, la natation et le judo et E l'ensemble des élèves de l'école. On peut alors dresser le diagramme suivant (dit diagramme de "Venn" ou diagramme "en patates") :



Traduisons maintenant chaque information de l'énoncé en une équation :

- 400 pratiquent le tennis signifie que $x + t + q + s = 400$.
- 500 pratiquent la natation signifie que $y + t + q + r = 500$.
- 150 pratiquent le judo signifie que $s + q + r + z = 150$.
- 300 pratiquent le tennis et la natation signifie que $t + q = 300$.
- Il y a autant d'élèves à pratiquer les trois sports que d'élèves qui ne pratiquent que le tennis signifie que $q = x$.
- Ceux qui pratiquent seulement le tennis et le judo sont au nombre de 75 signifie que $s = 75$.
- 400 élèves pratiquent exactement deux sports signifie que $s + t + r = 400$.

D'où le système :

$$\begin{cases} x + \boxed{t+q} + s = 400 & (L_1) \\ y + \boxed{t+q} + r = 500 & (L_2) \\ s + q + r + z = 150 & (L_3) \\ \boxed{t+q} = 300 & (L_4) \\ q = x & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ s + t + r = 400 & (L_7) \end{cases} \iff \begin{cases} x + 300 + s = 400 & (L_1) \\ y + 300 + r = 500 & (L_2) \\ s + \boxed{q} + r + z = 150 & (L_3) \\ t + \boxed{q} = 300 & (L_4) \\ \boxed{q} = x & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ s + t + r = 400 & (L_7) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 300 + \boxed{s} = 400 & (L_1) \\ y + 300 + r = 500 & (L_2) \\ \boxed{s} + x + r + z = 150 & (L_3) \\ t + x = 300 & (L_4) \\ q = x & (L_5) \\ \boxed{s} = 75 & (L_6) \\ \boxed{s} + t + r = 400 & (L_7) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 300 + 75 = 400 & (L_1) \\ y + 300 + r = 500 & (L_2) \\ 75 + x + r + z = 150 & (L_3) \\ t + x = 300 & (L_4) \\ q = x & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ 75 + t + r = 400 & (L_7) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = 25 & (L_1) \\ y + 300 + r = 500 & (L_2) \\ 75 + \boxed{x} + r + z = 150 & (L_3) \\ t + \boxed{x} = 300 & (L_4) \\ q = \boxed{x} & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ 75 + t + r = 400 & (L_7) \end{cases}$$

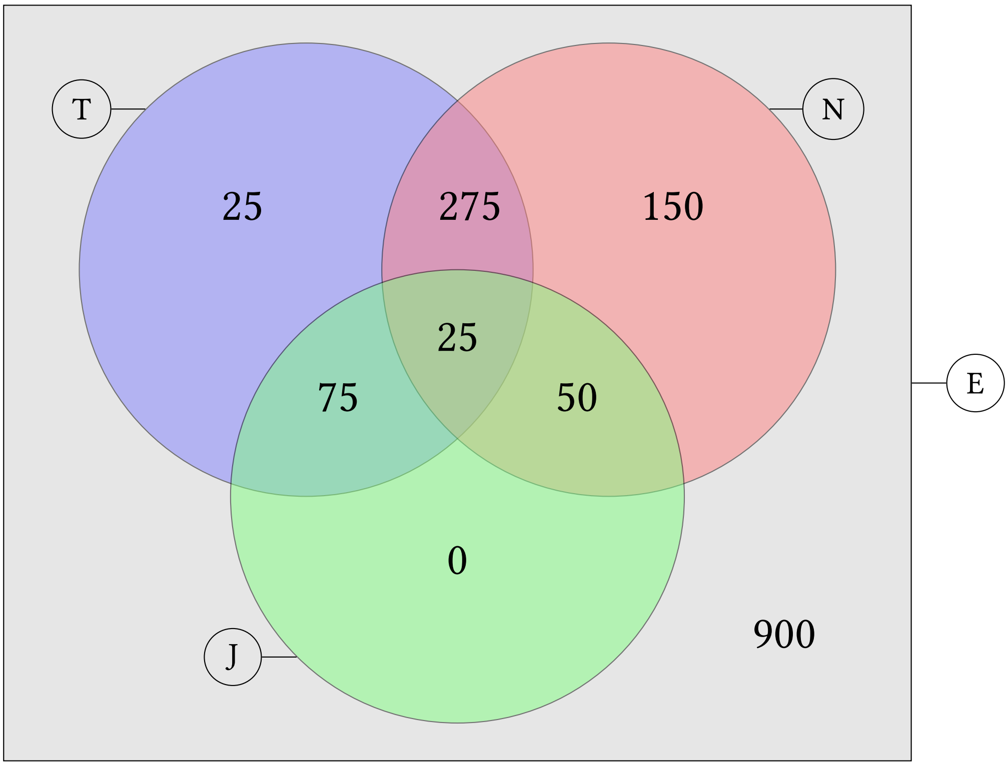
$$\iff \begin{cases} x = 25 & (L_1) \\ y + 300 + r = 500 & (L_2) \\ 100 + r + z = 150 & (L_3) \\ t + 25 = 300 & (L_4) \\ q = 25 & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ 75 + t + r = 400 & (L_7) \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = 25 & (L_1) \\ y + 300 + r = 500 & (L_2) \\ r + z = 50 & (L_3) \\ \boxed{t} = 275 & (L_4) \\ q = 25 & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ 75 + \boxed{t} + r = 400 & (L_7) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = 25 & (L_1) \\ y + 300 + \boxed{r} = 500 & (L_2) \\ \boxed{r} + z = 50 & (L_3) \\ t = 275 & (L_4) \\ q = 25 & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ \boxed{r} = 50 & (L_7) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x = 25 & (L_1) \\ y = 150 & (L_2) \\ z = 0 & (L_3) \\ t = 275 & (L_4) \\ q = 25 & (L_5) \\ s = 75 & (L_6) \\ r = 50 & (L_7) \end{array}\right.$$

On déduit enfin que le nombre d'élèves ne pratiquant aucun sport est $n = 1\,500 - (25 + 150 + 275 + 25 + 75 + 50) = 900$. Ce qui donne le diagramme ci-dessous permettant de répondre aux affirmations :



Partie 2 - Raisonnement mathématique

Exercice 6 : FVVF

Item A : Faux

Rappel : $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln a^n = n \ln a$; $e^{\ln a} = a$ avec $a > 0$.

$$\begin{aligned}
f(-\ln 2) &= f\left(\ln \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}e^{2\ln\frac{1}{2}} - e^{\ln\frac{1}{2}} - 2 \times (-\ln 2) - 4 \\
&= \frac{3}{2}e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} + 2\ln 2 - \frac{8}{2} \\
&= \frac{3}{2}e^{\ln\frac{1}{4}} + 2\ln 2 - \frac{9}{2} \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + 2\ln 2 - \frac{9}{2} \\
&= 2\ln 2 + \frac{3}{8} - \frac{9 \times 4}{4 \times 4} \\
&= \boxed{2\ln 2 - \frac{33}{8}}
\end{aligned}$$

Item B : Vrai

Pour tout x de $]-\infty\,;2]$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3}{2} \times 2e^{2x} - e^x - 2 \\
&= 3e^{2x} - e^x - 2
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
(3e^x + 2)(e^x - 1) &= 3e^{2x} - 3e^x + 2e^x - 2 \\
&= 3e^{2x} - e^x - 2 \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

Item C : Vrai

x	$-\infty$	a	b	0		2
$f'(x)$		$-$		0	$+$	
f		$f(a)$	$f(b)$	$-\frac{7}{2}$		

$f'(x)$ est du signe de $(e^x - 1)$ car $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, ainsi $(3e^x + 2) > 0$.

$$\begin{aligned}
e^x - 1 > 0 &\iff e^x > 1 \\
&\iff \ln e^x > \ln 1 \\
&\iff x > 0
\end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{3}{2}e^0 - e^0 - 4 = \frac{3}{2} - 1 - 4 = -\frac{7}{2}$$

f étant décroissante sur $]-\infty\,;0]$, si a et b sont deux réels négatifs tels que $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

Item D : Faux

Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a se note $f'(a)$.

Or, on cherche les points de C_f d'absisse x en lesquels la tangente a un coefficient directeur égale à 2.
Par conséquent, on est amené à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} f'(x) = 2 &\iff 3\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = 2 \\ &\iff 3\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 4 = 0 \\ &\iff 3\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - \mathrm{e}^x - 4 = 0 \\ &\iff 3X^2 - X - 4 = 0 \qquad \text{en posant } X = \mathrm{e}^x \text{ avec } X > 0 \end{aligned}$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49 = 7^2 > 0$ donc $X_1 = \dfrac{1-7}{2 \times 3} = -1 < 0$ et $X_2 = \dfrac{1+7}{2 \times 3} = \dfrac{4}{3} > 0$.

Donc une seule solution convient, c'est $X = \dfrac{4}{3} \iff \mathrm{e}^x = \dfrac{4}{3} \iff x = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

Et par conséquent, il existe une seule et unique tangente à C_f ayant pour pente 2, c'est celle que l'on trace au point d'abscisse $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

☰ Exercice 7 : VVVV

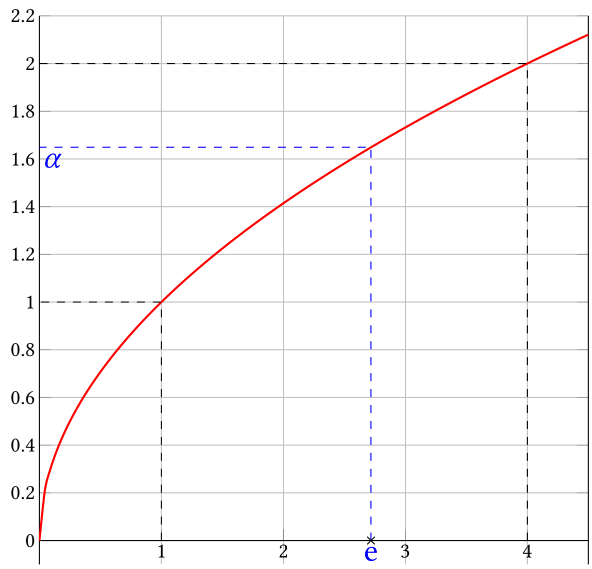
Item A : Vrai

Les abscisses x des points d'intersection entre C et l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation :

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff \frac{2\ln(x) - 1}{x} = 0 \\
&\iff 2\ln(x) - 1 = 0 \\
&\iff \ln(x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\
&\iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\
&\iff x = \sqrt{\mathrm{e}} = \alpha
\end{aligned}
$$

On constate sur le graphique ci-contre que la racine carrée de e est bien comprise entre 1 et 2.

Courbe de la fonction racine carrée



Item B : Vrai

$$
\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \,]0\,;+\infty[,\, f'(x) &= \frac{(2\ln(x) - 1)' \times x - (2\ln(x) - 1) \times (x)'}{x^2} \\
&= \frac{2 \times \frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - (2\ln(x) - 1) \times 1}{x^2} \\
&= \frac{2 - 2\ln(x) + 1}{x^2} \\
&= \boxed{\frac{3 - 2\ln(x)}{x^2}}
\end{aligned}
$$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	||	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	

$f'(x)$ est du signe de $(3 - 2\ln(x))$ car $x^2 > 0$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

$$
\begin{aligned}
3 - 2\ln(x) > 0 &\iff \ln x < \frac{3}{2} \\
&\iff x < \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) - 1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} = \boxed{2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}$$

On constate que f admet bien un maximum global qui vaut $2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

➔ Item C : Vrai

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \in \left]0\,;+\infty\right[, F'(x) &= 2\times(\ln x)'\times\ln(x) - (\ln x)' \qquad \text{car } (u^n)' = nu'u^{n-1}\\ &= 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)-\frac{1}{x}\\ &= \boxed{\frac{2\ln(x)-1}{x}} = f'(x)\end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, on a $F(1) = (\ln 1)^2 - \ln 1 = 0$ donc F est bien la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.

➔ Item D : Vrai

Dans le cas général, C_f admet une asymptote verticale en un réel a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Or $f(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x} = \dfrac{1}{x}\times(2\ln(x)-1)$ et on a alors :

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} 2\ln(x)-1 = -\infty\\ &\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty\end{aligned}\right\}\text{ donc par produit, } \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

Et par conséquent, C admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ qui est bien l'axe des ordonnées ou la droite (OJ).

≡ Exercice 8 : VVVF

Item A : Vrai

Pour montrer que (v_n) est une suite géométrique, on cherche à montrer qu'il existe un réel q tel que $v_{n+1} = qv_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \\ &= \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) \qquad \text{car } \ln a^n = n\ln a \\ &= 0{,}5\,v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison 0,5 avec $v_0 = \ln(u_0) = \ln \mathrm{e} = 1$. Son expression en fonction de n est donnée par la formule $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}5^n$.

Item B : Vrai

S est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 1$. Cette somme nous est donnée par la formule $S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ S &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n \\ &= v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{car de 0 à } n\text{, il y a } n+1 \text{ termes} \\ &= 1 \times \frac{1-0{,}5^{n+1}}{1-0{,}5} \\ &= \frac{1}{0{,}5} \times \left(1 - 0{,}5^{n+1}\right) \\ &= 2 \times \left(1 - 0{,}5^{n+1}\right) \\ &= 2 - 2 \times 0{,}5^{n+1} \\ &= 2 - \underbrace{2 \times 0{,}5}_{1} \times 0{,}5^n \\ &= \boxed{2 - 0{,}5^n} \end{aligned}$$

Item C : Vrai

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ S &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n \\ &= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ldots + \ln(u_n) \\ &= \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) \\ &= \ln P \end{aligned}$$

On a alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $S = \ln P \iff \boxed{\mathrm{e}^S = P}$.

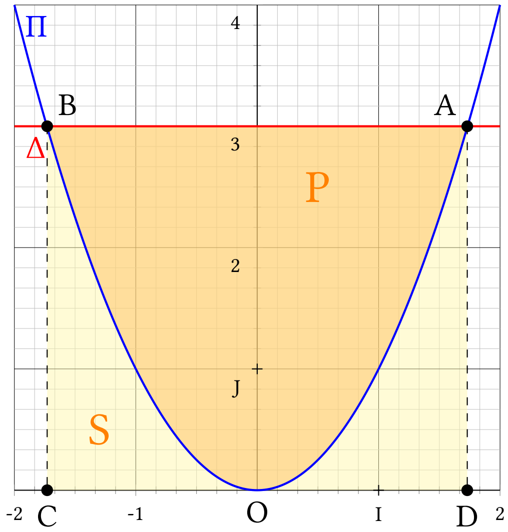
Item D : Faux

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ car $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - 0{,}5^n = 2$. On a alors :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n \to +\infty} S = 2 \\ &\text{et } P = \mathrm{e}^S \end{aligned}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{n \to +\infty} P = \mathrm{e}^2}$$

≡ Exercice 9 : VFVV

Π est la représentation graphique de la courbe d'équation $y = x^2$ et Δ celle de la droite d'équation $y = 3$.
Par conséquent les deux points A et B ont pour abcsisses respective $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ de même que D et C.
P est l'aire du domaine de plan comprise entre le segment [AB] et la courbe Π.
S est l'aire du domaine de plan comprise entre Π, l'axe des abscisses et les deux droites verticales (BC) et (AD).



❯ *Item A : Vrai*

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^3 - \left(-\sqrt{3}\right)^3\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right)\\ &= \frac{6\sqrt{3}}{3}\\ &= \boxed{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Ceci représente en unités d'aires l'aire noté S de la partie jaune sur le graphique.

❯ *Item B : Faux*

ABCD est un rectangle de largeur $AD = 3$ et de longueur $AB = 2\sqrt{3}$. Son aire est donc $\mathcal{A}_{ABCD} = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

❯ *Item C : Vrai*

Il vient alors que l'aire de la surface P est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_P &= \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_S\\ &= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\\ &= \boxed{4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

❯ *Item D : Vrai*

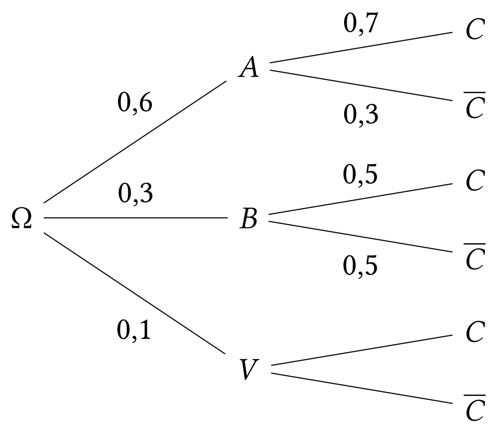
$$\frac{\mathcal{A}_P}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{4\cancel{\sqrt{3}}}{6\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}$$

Donc P représente bien les deux tiers de l'aire de ABCD.

≡ Exercice 10 : FVFF

On note :

- A : « Armand accueille le client »
- B : « Bernard accueille le client »
- V : « Un autre vendeur accueille le client »
- C : « Le client réalise un achat »



Si la pharmacie est ouverte pendant 10 heures et que Armand y travaille six heures et Bernard trois heures alors $p(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6$; $p(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$ et $p(V) = 1 - p(A) - p(B) = 0{,}1$.

Les données de l'énoncé permettent alors de construire l'arbre ci-contre et on note également que $p(C) = 0{,}59$.

➜ *Item A : Faux*

La probabilité que le client soit accueilli par Bernard ou n'effectue pas un achat est l'événement noté $B \cup \overline{C}$ et on a :

$$\begin{aligned} p\left(B \cup \overline{C}\right) &= p(B) + p\left(\overline{C}\right) - p\left(B \cap \overline{C}\right) \\ &= 0{,}3 + (1 - 0{,}59) - 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}3 + 0{,}41 - 0{,}15 \\ &= \boxed{0{,}56} \end{aligned}$$

➜ *Item B : Vrai*

La probabilité que le client effectue un achat sachant qu'il n'a pas été accueilli ni par Armand ni par Bernard se note $p_V(C) = \dfrac{p(C \cap V)}{p(V)}$.

Or d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(C) = p(C \cap V) + p(C \cap A) + p(C \cap B) &\iff p(C \cap V) = p(C) - p(C \cap A) - p(C \cap B) \\ &\iff p(C \cap V) = 0{,}59 - 0{,}6 \times 0{,}7 - 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &\iff p(C \cap V) = 0{,}59 - 0{,}42 - 0{,}15 \\ &\iff \boxed{p(C \cap V) = 0{,}02} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} p_V(C) &= \frac{p(C \cap V)}{p(V)} \\ &= \frac{0{,}02}{0{,}1} \times \frac{100}{100} \\ &= \frac{2}{10} \\ &= \boxed{0{,}2} \end{aligned}$$

➋ *Item C : Faux*

La probabilité que le client ait été accueilli par Armand sachant qu'il n'a pas effectué d'achat se note $p_{\overline{C}}(A)$ et est égale à :

$$\begin{aligned}
p_{\overline{C}}(A) &= \frac{p\left(A \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} \\
&= \frac{0{,}6 \times 0{,}3}{0{,}41} \\
&= \frac{0{,}18}{0{,}41} \\
&= \boxed{\frac{18}{41}}
\end{aligned}$$

➋ *Item D : Faux*

Si on choisit au hasard un client chaque samedi pendant n semaines et qu'on note X la variable aléatoire qui compte parmi ces n clients le nombre de clients ayant été accueilli par Armand alors X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = p(A) = 0{,}6$ que l'on note $X \sim \mathcal{B}(n; 0{,}6)$.
La probabilité que parmi ces n clients, exactement k ait été accueilli par Armand est alors :

$$\boxed{p\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

On peut alors exprimer en fonction de n la probabilité qu'au moins un client ait été accueilli par Armand :

$$\begin{aligned}
p\,(X \geqslant 1) &= 1 - p\,(X = 0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} 0{,}6^0 (1 - 0{,}6)^{n-0} \\
&= 1 - 1 \times 1 \times 0{,}4^n \\
&= \boxed{1 - 0{,}4^n}
\end{aligned}$$

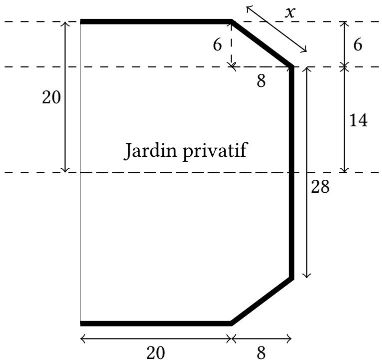
≡ Exercice 11 : VFFV

Item A : Vrai

Étant donné que la place publique, la résidence et le jardin privatif sont symétriques par rapport à la droite horizontale fictive tracée en pointillés, alors la résidence est un rectangle de longueur $2 \times 20 = 40$ m et de largeur 20 m.
Sa surface au sol est donc égale à $40 \times 20 = \boxed{800\,\text{m}^2}$.

Item B : Faux

Le schéma du jardin privatif enrichi de cotes supplémentaires est le suivant :



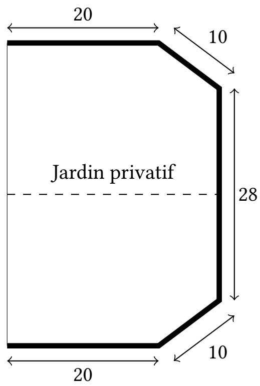
Le théorème de Pythagore permet de déterminer la valeur de x :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} \\ &= \boxed{10\,\text{m}} \end{aligned}$$

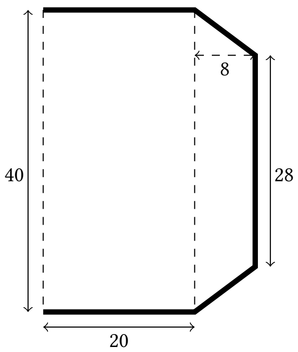
Item C : Faux

La haie paysagère borde le jardin privatif en suivant les traits épais sur le schéma. Sa longueur noté $\mathscr{L}$ est donc égale à :

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= 20 + 10 + 28 + 10 + 20 \\ &= \boxed{88\,\text{m}} \end{aligned}$$



Item D : Vrai



L'aire du jardin privatif peut-être "vu" comme la somme de deux aires, celle d'un rectangle et celle d'un trapèze d'aire égale à $\dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$. Par conséquent, son aire noté $\mathscr{A}$ est :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= 40 \times 20 + \frac{(28 + 40) \times 8}{2} \\ &= 800 + \frac{68 \times 4 \times \cancel{2}}{\cancel{2}} \\ &= 800 + 272 \\ &= \boxed{1072\,\text{m}^2} \end{aligned}$$

☰ Exercice 12 : FFFV

Le rendement noté R du travailleur exprimé en mètres par heure se définit comme le quotient entre la longueur ℓ en mètres de clôture posée par le temps de travail h. Ainsi, on a : $R = \dfrac{\ell}{h} \iff \ell = R \times h$.

Item A : Faux

Paul travaille h_1 heures avec un rendement $R_1 = 2$ m/h. Par conséquent, au termes de ces h_1 heures de travail, il aura réalisé une longueur de clôture égale à $\boxed{\ell_1 = 2h_1}$ mètres.
De même, Pierre travaillant h_2 heures à raison de 2,5 m/h, il aura posé $\boxed{\ell_2 = 2{,}5h_2}$ mètres de clotûre au bout de h_2 heures.
Pierre et Paul ayant travaillé 40 heures au total et ayant posé 88 mètres de clôture (d'après question C de l'exercice 11), on déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = 88 \\ h_1 + h_2 = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} 2h_1 + 2{,}5h_2 = 88 \\ h_1 + h_2 = 40 \quad (\times 2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2h_1 + 2{,}5h_2 = 88 \quad (L_1) \\ 2h_1 + 2h_2 = 80 \quad (L_2) \end{cases}$$

Par $(L_1) - (L_2)$, il vient :

$$0{,}5h_2 = 8 \iff h_2 = \frac{8}{0{,}5} \iff h_2 = \frac{8}{\frac{1}{2}} \iff h_2 = 8 \times 2 = 16$$

Par conséquent, Pierre a travaillé $h_2 = 16$ heures tandis que Paul a travaillé $h_1 = 40 - 16 = 24$ heures.

Item B : Faux

En 24 heures, Paul réalise une longueur de haie de $24 \times 2 = 48$ mètres tandis que Pierre réalise une haie de $16 \times 2{,}5 = 40$ mètres. Paul réalise donc 8 mètres de haie supplémentaire sur Pierre, ce qui représente par rapport à Pierre une proportion égale à $\dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ soit 20 % de haie en plus.

Item C : Faux

Si Pierre travaillait seul avec le même rendement de 2,5 m/h alors, pour poser une haie de longueur égale à 88 mètres, il mettrait un temps t égale à :

$$t = \frac{88}{2{,}5} = \frac{88}{\frac{5}{2}} = 88 \times \frac{2}{5} = \frac{176}{5} = \frac{100}{5} + \frac{50}{5} + \frac{25}{5} + \frac{1}{5} = 20 + 10 + 5 + 0{,}2 = \boxed{35{,}2\,\text{h}}$$

Item D : Vrai

Si Pierre et Paul travaillait chacun une durée égale à h heures à un rendement de 2 m/h alors h serait la solution de l'équation : $2h + 2h = 88 \iff 4h = 88 \iff h = 22$.

Pierre et Paul travaillerait donc chacun 22 heures et par conséquent l'entreprise devrait prévoir un temps total de 44 heures pour ce chantier.

Les 4 heures supplémentaires par rapport au chantier initial de 40 heures représente alors une augmentation de $\dfrac{4}{40} \times 100 = \dfrac{1}{10} \times 100 = 0{,}1 \times 100 = 10\,\%$.

☰ Exercice 13 : FFVF

➜ *Item A : Faux*

Le coût de revient d'un lavage pour un résident est $x + 0{,}1x^2$. Or il faut 2 lavages par semaines pendant 50 semaines pour 60 résidents. Du point de vue de François, il faut tenir compte des 8 400 € nécessaire à l'entretien de ses machines. Son bénéfice total noté B est alors égal à :

$$\begin{aligned} B &= 2 \times 50 \times 60 \times (x + 0{,}1x^2) - 8\,400 \\ &= 6000(x + 0{,}1x^2) - 8\,400 \\ &= \boxed{600x^2 + 6\,000x - 8\,400} \end{aligned}$$

➜ *Item B : Faux*

Si on divise par 2 le nombre de lavages annuel alors le bénéfice B'de François s'élève à :

$$\begin{aligned} B &= 50 \times 60 \times (x + 0{,}1x^2) - 8\,400 \\ &= 3000(x + 0{,}1x^2) - 8\,400 \\ &= 300x^2 + 3\,000x - 8\,400 \end{aligned}$$

On constate que $B' \neq \dfrac{B}{2}$.

➜ *Item C : Vrai*

Si $x = 3$ alors $B = 600 \times 3^2 + 6\,000 \times 3 - 8\,400 = 600 \times 9 + 18\,000 - 8\,400 = 5400 + 18\,000 - 8\,400 = \boxed{15\,000 \text{ €}}$.

➜ *Item D : Faux*

Si $x = 3$ alors le coût de revient d'un lavage pour un résident vaut $3 + 0{,}1 \times 3^2 = 3 + 0{,}9 = \boxed{3{,}9 \text{ €}}$.

☰ Exercice 14 : VFFF

Pour financer l'achat des deux machines, François a besoin d'un budget de 8 000 € (d'après la question 13). S'il possède un apport de 2 000 €, il devra emprunter à sa banque une somme $S = 6\,000$ €. François rembourse chaque année une somme fixe égale à 1 500 € par an qui vienne en déduction de S et auquel on doit ajouter 5 % d'intérêts qui sont calculés sur la somme non encore remboursée en début d'année.
On peut alors construire le tableau d'amortissement suivant :

	Capital restant dû	Intérêts dûs	Somme payée par François
Début 1ère année	**6 000**	$6\,000 \times \frac{5}{100} = 300$	$1\,500 + 300 = 1\,800$
Fin 1ère année	$6\,000 - 1\,500 = 4\,500$		
Début 2ième année	**4 500**	$4\,500 \times \frac{5}{100} = 225$	$1\,500 + 225 = 1\,725$
Fin 2ième année	$4\,500 - 1\,500 = 3\,000$		
Début 3ième année	**3 000**	$3\,000 \times \frac{5}{100} = 150$	$1\,500 + 150 = 1\,650$
Fin 3ième année	$3\,000 - 1\,500 = 1\,500$		
Début 4ième année	**1 500**	$1\,500 \times \frac{5}{100} = 75$	$1\,500 + 75 = 1\,575$
Fin 4ième année	$1\,500 - 1\,500 = 0$		
	TOTAL	**750**	**6 750**

➜ *Item A : Vrai*

Sur le tableau d'amortissement, on constate que la durée du prêt est bien égale à 4 ans.

➜ *Item B : Faux*

Au début de la deuxième année, la somme non encore remboursée est de 4 500 €.

➜ *Item C : Faux*

Sur le tableau d'amortissement, on constate que les intérêts annuels diminuent de 75 € par an.

➜ *Item D : Faux*

Le montant total des intérêts payés pour le prêt est égal à 750 €.

☰ Exercice 15 : VFVV

➜ *Item A : Vrai*

La botte de paille est un cylindre de hauteur $h = 1$ m et de rayon $r = \dfrac{1{,}25}{2} = 0{,}625$ m. Son volume est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\text{botte}} &= \pi r^2 h \\
&\simeq 3{,}14 \times 0{,}625^2 \times 1 \\
&\simeq 314 \times 10^{-2} \times (625 \times 10^{-3})^2 \\
&\simeq \underbrace{314 \times 625 \times 625}_{\text{à poser}} \times 10^{-2} \times 10^{-6} \\
&\simeq 122\,656\,250 \times 10^{-8} \\
&\simeq 1{,}23 \text{ m}^3
\end{aligned}$$

Or la masse volumique de la botte de paille est de 140 kg/m³. Par conséquent, celle-ci a une masse supérieure à 140 kg.

Remarque : Afin d'éviter de poser un calcul fastidieux de multiplication, on peut aussi remarquer que :

$$314 \times 625 \times 625 > 300 \times 600 \times 600 = 3 \times 6 \times 6 \times 10^6 = 108 \times 10^6 = 108\,000\,000$$

Le volume de la botte sera donc supérieur à 1,08 m³ et donc sa masse supérieure à 140 kg.

➜ *Item B : Faux*

La taxe est égale à 20 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$.

$$\text{Prix HT} = x \text{ €} \xrightarrow{\times 1{,}2} \text{Prix TTC} = 4{,}2 \text{ €}$$

On a donc : $1{,}2x = 4{,}2 \iff x = \dfrac{4,2}{1,2} = \dfrac{42}{12} = \dfrac{36}{12} + \dfrac{6}{12} = 3 + 0{,}5 = \boxed{3{,}50 \text{ €}}$

➜ *Item C : Vrai*

Concernant la tranche 2 et en considérant **une réduction de 10 % sur le prix HT** et un taux de taxe de 20 %, François va payer un prix P tel que $P = 0{,}9 \times \underbrace{p_{\text{HT}} \times 1{,}2}_{p_{\text{TTC}}} = 0{,}9 \times p_{\text{TTC}}$

Au final, c'est comme si François avait bénéficié d'une réduction de 10 % directement sur le prix TTC.

➜ *Item D : Vrai*

Les bottes seront installés en bordure de la place publique suivant les traits épais sur le schéma, soit sur une longueur de $50 + 40 + 50 = 140$ m. Leur diamètre étant de 1,25 m, il en faudra $\dfrac{140}{1{,}25} = \dfrac{140}{\frac{5}{4}} = 140 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{28 \times \cancel{5} \times 4}{\cancel{5}} = 112$. Le prix total P payé par François se détaille donc ainsi :

$$\begin{aligned}
P &= 1{,}2 \times (50 \times 5 + 50 \times 5 \times 0{,}9) + 12 \times 4{,}2 \\
&= 1{,}2 \times (250 + 225) + 50{,}4 \\
&= 1{,}2 \times 475 + 50{,}4 = \boxed{620{,}4 \text{ €}}
\end{aligned}$$