Concours ACCÈS 2018

Corrigé détaillé de l'épreuve de **Raisonnement Logique & Mathématiques**

Réponses aux exercices

Partie 1 - Raisonnement logique

Exercice 1 : FFFV

Notons respectivement p_i et c_i les capitaux de Pierre et de Colette au 1er jour de chaque mois, on a alors au 1er janvier :

$$p_1 + c_1 = 54\,000$$

Au 1er février, Pierre verse à Colette une somme qui permet à cette dernière de doubler son capital. Elle reçoit donc une somme égale à c_1 € qui vient en déduction du capital de Pierre, d'où :

$$p_2 = p_1 - c_1 \qquad \text{et} \qquad c_2 = c_1 + c_1 = 2c_1$$

Au 1er mars, Colette verse à Pierre une somme qui permet à ce dernier d'augmeter de moitié son capital. Il reçoit donc une somme égale à $\frac{1}{2}(p_1 - c_1)$ €, somme qui vient en déduction du capital de Colette, d'où :

$$p_3 = (p_1 - c_1) + \frac{1}{2}(p_1 - c_1) = \frac{3}{2}(p_1 - c_1) \qquad \text{et} \qquad c_3 = 2c_1 - \frac{1}{2}(p_1 - c_1) = \frac{5}{2}c_1 - \frac{1}{2}p_1$$

Suite à ces deux transferts, Pierre et Colette ont un capital identique d'où :

$$\begin{aligned} p_2 = c_2 &\iff \frac{3}{2}(p_1 - c_1) = \frac{1}{2}(5c_1 - p_1) \\ &\iff 3p_1 - 3c_1 = 5c_1 - p1 \\ &\iff 4p_1 = 8c_1 \\ &\iff \boxed{p_1 = 2c_1} \end{aligned}$$

On déduit alors le système suivant :

$$\begin{cases} p_1 + c_1 = 54\,000 & (e_1) \\ p_1 - 2c_1 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

$(e_1) - (e_2) \iff 3c_1 = 54\,000 \iff c_1 = \dfrac{54\,000}{3} = \dfrac{\cancel{3} \times 18\,000}{\cancel{3}} = 18\,000.$
D'où $p_1 = 54\,000 - 18\,000 = 36\,000$

✏ Affirmation A : Faux

Au 1er janvier, Pierre a un capital de $36\,000$ € et Colette de $18\,000$ €.

✏ Affirmation B : Faux

$18\,000 \times 1{,}5 = 27\,000 \neq 36\,000.$

✏ Affirmation C : Faux

Le 1er février, Pierre a donné à Colette une somme de c_1 € soit $18\,000$ €.

✏ Affirmation D : Vrai

Le 1er mars, Colette a donné à Pierre une somme de $0{,}5(p_1 - c_1) = 0{,}5 \times (36\,000 - 18\,000) = 0{,}5 \times 18\,000 = 9\,000$ €.

➠ Exercice 2 : VVFV

Nous allons envisager les scénarios possibles de pratique d'un sport par chaque individu et vérifer les propositions suivantes dont on nous dit **qu'une seule est vraie** :

① Charles ne fait pas de football

② Bertrand ne fait pas de golf

③ Bertrand ne fait pas de football

④ Charles fait du golf

➜ *Scénario 1 : Impossible*

	Football	Golf	Tennis
Bertrand	*pratique*		
Charles		*pratique*	
Michel			*pratique*

① Vrai

② Vrai

③ Faux

④ Vrai

➜ *Scénario 2 : Impossible*

	Football	Golf	Tennis
Bertrand			*pratique*
Charles		*pratique*	
Michel	*pratique*		

① Vrai

② Vrai

③ Vrai

④ Vrai

➜ *Scénario 3 : C'est le bon scénario*

	Football	Golf	Tennis
Bertrand		*pratique*	
Charles	*pratique*		
Michel			*pratique*

① Faux

② Faux

③ Vrai

④ Faux

✏ Affirmation A : Vrai

Dans le scénario correct, Charles fait effectivement du football.

✏ Affirmation B : Vrai

Dans le scénario correct, Bertrand fait du golf et ne fait donc pas de tennis.

✏ Affirmation C : Faux

Dans le scénario correct, Michel fait du tennis et non du football.

✏ Affirmation D : Vrai

Dans le scénario correct, Bertrand fait du golf.

➠ Exercice 3 : VFFF

✏ **Affirmation A : Vrai**

Si ces 1000 personnes sont les seuls électeurs et que parmi ces 1000 électeurs, 530 votent pour le candidat X, alors celui-ci obtient la majorité absolue et il est sûr d'être élu. La probabilité qu'il soit élu est donc bien égale à1.

✏ **Affirmation B : Faux**

La proportion de personnes dans l'échantillon votant pour le candidat X est de $\frac{530}{1000} \times 100 = 53\%$. La marge d'erreur étant de plus ou moins 10%, la proportion de personnes votant pour le candidat X dans la population en générale appartiendra donc à l'intervalle :

$$[53\% - 0{,}1 \times 53\% \,; 53\% + 0{,}1 \times 53\%] = [47{,}7\% \,; 58{,}3\%]$$

✏ **Affirmation C : Faux**

Il n'est pas certain que le candiat X soit élu puisque l'intervalle précédent ne permet pas d'affirmer qu'il aura la majorité absolue.

✏ **Affirmation D : Faux**

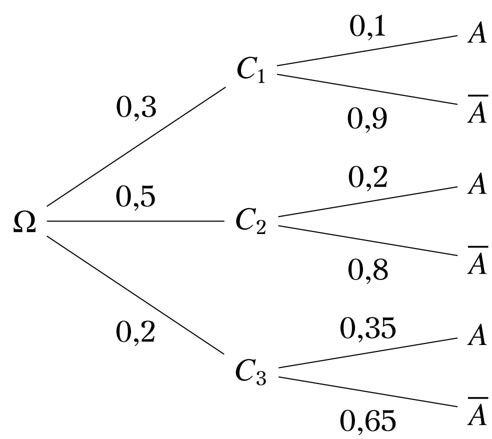
Rien ne permet d'affirmer dans l'énoncé qu'une plus grande part d'hommes favorables au candidat X augmentera sa probabilité de gagner.

➽ Exercice 4 : FVVF

On définit les événements suivants :

- C_i : « le client appartient à la classe i »
- A : « le client achète le produit »
- $\overline{A}$: « le client n'achète pas le produit »

Le tableau de l'énoncé permet de construire l'arbre pondéré suivant :



✏ Affirmation A : Faux

La probabilité qu'un client achète le produit est :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(C_1) \times p_{C_1}(A) + p(C_2) \times p_{C_2}(A) + p(C_3) \times p_{C_3}(A) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}35 \\ &= 0{,}03 + 0{,}1 + 0{,}07 \\ &= \boxed{0{,}2} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

On cherche la probabilité qu'un client ait moins de 30 ans sachant qu'il a acheté le produit, d'où :

$$p_A(C_1) = \frac{p(A \cap C_1)}{p(A)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}1}{0{,}2} = \frac{0{,}03}{0{,}2} = \frac{3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-1}} = 1{,}5 \times 10^{-1} = \boxed{0{,}15}$$

✏ Affirmation C : Vrai

On cherche la probabilité conditionnelle suivante :

$$p_{\overline{C_1}}(A) = \frac{p(A \cap \overline{C_1})}{p(\overline{C_1})} = \frac{p(A \cap C_2) + p(A \cap C_3)}{1 - p(C_1)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}35}{0{,}5 + 0{,}2} = \frac{0{,}17}{0{,}70} = \boxed{\frac{17}{70}}$$

✏ Affirmation D : Faux

On cherche la probabilité qu'un client n'appartienne pas à la classe 2 sachant qu'il n'a pas acheté le produit, d'où :

$$p_{\overline{A}}(\overline{C_2}) = \frac{p(\overline{A} \cap \overline{C_2})}{p(\overline{A})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}65}{1 - 0{,}2} = \frac{27 + 0{,}13}{0{,}8} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = \boxed{0{,}5} \quad \text{soit } 50\%.$$

➠ Exercice 5 : VFFV

✏ **Affirmation A : Vrai**

L'affirmation : « Un de mes élèves a une note au plus égale a 8/20 » est fausse signifie que sa négation est vraie.
Donc l'affirmation : « Tous mes élèves ont une note supérieure à 8/20 » est vraie.

✏ **Affirmation B : Faux**

Si tous les élèves du professeur ont plus de 8/20 alors il est faux d'affirmer que **seul** un de ses élèves a une note supérieure à 8/20.

✏ **Affirmation C : Faux**

Si tous les élèves du professeur ont plus de 8/20 alors aucun élève a moins de 8/20.

✏ **Affirmation D : Vrai**

Si tous les élèves du professeur ont plus de 8/20 alors on peut affirmer qu'il existe quelques-uns de ses élèves ayant plus de 8/20.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

Exercice 6 : FFVV

Affirmation A : Faux

Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;7]$, on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 5 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \qquad\qquad \textit{Rappel : } (u^n)' = nu'u^{n-1} \\ &= \boxed{\frac{10\ln(x)}{x} = g(x)} \end{aligned}$$

Affirmation B : Faux

Pour déterminer un éventuel maximum de g, on la dérive et on dresse son tableau de variations. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;7]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 10 \times \frac{(\ln(x))' \times (x) - (\ln(x)) \times (x)'}{x^2} \\ &= 10 \times \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - \ln(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{10(1-\ln(x))}{x^2} \end{aligned}$$

x	0		e		7
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
g	||	↗	$\frac{10}{\mathrm{e}}$	↘	

$g'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$ car $\dfrac{10}{x^2}$ est toujours positif sur $]0\,;7]$.

$$\begin{aligned} 1-\ln(x) > 0 &\iff -\ln(x) > -1 \\ &\iff \ln(x) < 1 \\ &\iff x < \mathrm{e} \end{aligned}$$

$$g(\mathrm{e}) = \frac{10\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{10 \times 1}{\mathrm{e}} = \frac{10}{\mathrm{e}}$$

$g(2) = \dfrac{10\ln 2}{2} = 5\ln 2 > 0$ et $g(7) = \dfrac{10\ln 7}{7} > 0$

Donc pour tout $x \in [2\,;7], g(x) > 0$

x	0	2		e		7
g	||	$g(2)$	↗	$\frac{10}{\mathrm{e}}$	↘	$g(7)$

Affirmation D : Vrai

$$\int_0^{\mathrm{e}} g(x)\mathrm{d}x = G(\mathrm{e}) - G(0) = 5(\ln\mathrm{e})^2 - 5(\ln 1)^2 = 5 \times 1^2 - 5 \times 0^2 = 5 \in \mathbb{N}$$

➠ Exercice 7 : FVVV

✏ Affirmation A : Faux

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + 2 > 0$ et par conséquent $\ln(\mathrm{e}^x + 2)$ existe pour tout x de $\mathbb{R}$.

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) &= \frac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+2) - (2\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x+2)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x + 4 - 2\mathrm{e}^x + 2)}{(\mathrm{e}^x+2)^2} \\
&= \frac{6\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}
\end{aligned}$$

On a alors $h'(0) = \dfrac{6\mathrm{e}^0}{(\mathrm{e}^0+2)^2} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} < 1$ et $k(0) = \ln 3 > 1$ donc $\boxed{h'(0) < k(0)}$.

✏ Affirmation C : Vrai

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ k'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x+2)'}{\mathrm{e}^x+2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ 3k'(x) - 1 &= \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2} - 1 \\
&= \frac{3\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 2)}{\mathrm{e}^x+2} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x+2} = h(x)
\end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

Cherchons une primitive de $h(x)$ grâce à la question précédente. On sait que $h(x) = 3k'(x) - 1$ donc $H(x) = 3k(x) - x$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 h(x)\mathrm{d}x &= H(2) - H(0) \\
&= (3k(2) - 2) - (3k(0) - 0) \\
&= 3(k(2) - k(0)) - 2 \\
&= 3\left(\ln(\mathrm{e}^2+2) - \ln(\mathrm{e}^0+2)\right) - 2 \\
&= 3\left(\ln(\mathrm{e}^2+2) - \ln 3\right) - 2 \\
&= 3\ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+2}{3}\right) - 2 \\
&= \ln\left(\left(\frac{\mathrm{e}^2+2}{3}\right)^3\right) - 2 \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{\left(\mathrm{e}^2+2\right)^3}{27}\right) - 2}
\end{aligned}$$

➽ Exercice 8 : VVFV

✏ Affirmation A : Vrai

$$\begin{aligned} P_n(n) &= n^3 - 3n \times n^2 + (3n^2 - 1) \times n - n(n+1)(n-1) \\ &= n^3 - \cancel{3n^3} + \cancel{3n^3} - n - n(n^2 - 1) \\ &= n^3 - n - n^3 + n = 0 \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

$$\begin{aligned} P_n(n-1) &= (n-1)^3 - 3n \times (n-1)^2 + (3n^2 - 1) \times (n-1) - n(n+1)(n-1) \\ &= (n-1)\left[(n-1)^2 - 3n(n-1) + (3n^2 - 1) - n(n+1)\right] \\ &= (n-1)\left[\underbrace{n^2 - 2n + 1 - 3n^2 + 3n + 3n^2 - 1 - n^2 - n}_{0}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n(n+1) &= (n+1)^3 - 3n \times (n+1)^2 + (3n^2 - 1) \times (n+1) - n(n+1)(n-1) \\ &= (n+1)\left[(n+1)^2 - 3n(n+1) + (3n^2 - 1) - n(n-1)\right] \\ &= (n+1)\left[\underbrace{n^2 + 2n + 1 - 3n^2 - 3n + 3n^2 - 1 - n^2 + n}_{0}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $P_n(n-1) = P_n(n+1)$

✏ Affirmation C : Faux

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= 3x^2 - 3n \times 2x + (3n^2 - 1) \times 1 - \left[\underbrace{n(n+1)(n-1)}_{\text{constante}}\right]' \\ &= 3x^2 - 6nx + 3n^2 - 1 - 0 \end{aligned}$$

Donc $P'_n(n) = 3n^2 - 6n \times n + 3n^2 - 1 = 6n^2 - 6n^2 - 1 = -1$

✏ Affirmation D : Vrai

x	$-\infty$		x_1		x_2	$n+1$		$+\infty$
$P'_n(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$	
P_n		$\nearrow$		$\searrow$		0	$\nearrow$	

$$\Delta = (-6n)^2 - 4 \times 3 \times (3n^2 - 1) = 12$$

$$x_1 = \frac{6n - \sqrt{12}}{6} = \frac{6n - 2\sqrt{3}}{6} = n - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{6n + \sqrt{12}}{6} = \frac{6n + 2\sqrt{3}}{6} = n + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On constate que P_n est bien strictement croissante sur l'intervalle $[n+1\,;+\infty[$.

➽ Exercice 9 : VFFV

✏ Affirmation A : Vrai

Pour tout réel a et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_a'(x) = 1 - a\mathrm{e}^{-x}$.
Si $a \leqslant 0$ alors $1 - a\mathrm{e}^{-x} > 0$ et par conséquent, f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc monotone. Réciproquement, si f_a est monotone sur $\mathbb{R}$ alors $f_a'(x)$ est, soit positif, soit négatif pour tout x de $\mathbb{R}$. Or, si $f_a'(x) > 0$ alors $a \leqslant 0$.

✏ Affirmation B : Faux

La tangente à C_a au point A_a de coordonnées $(0\,;f_a(0))$ a pour équation :

$$y = f_a'(0)(x-0) + f_a(0) \iff \boxed{y = (1-a)x + a}$$

Or $(1-a)x_I + a = (1-a)\times 1 + a = 1 \neq y_I$ donc $I(1\,;0) \notin T_a$.

✏ Affirmation C : Faux

On considère le cas pour lequel $a > 0$ et on établit le tableau de variation de f_a.

$$\begin{aligned} f_a'(x) \geqslant 0 &\iff 1 - a\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \\ &\iff -a\mathrm{e}^{-x} \geqslant -1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{a} \\ &\iff -x \leqslant \ln\frac{1}{a} \\ &\iff x \geqslant -\ln\frac{1}{a} \\ &\iff x \geqslant \ln a \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$\ln a + 1$	$\nearrow$	

$$\begin{aligned} f_a(\ln a) &= \ln a + a\mathrm{e}^{-\ln a} \\ &= \ln a + a\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln a}} \\ &= \ln a + a \times \frac{1}{\ln a} \\ &= \ln a + 1 \end{aligned}$$

Le minimum de f_a est négatif si et seulement si $\ln a + 1 < 0$:

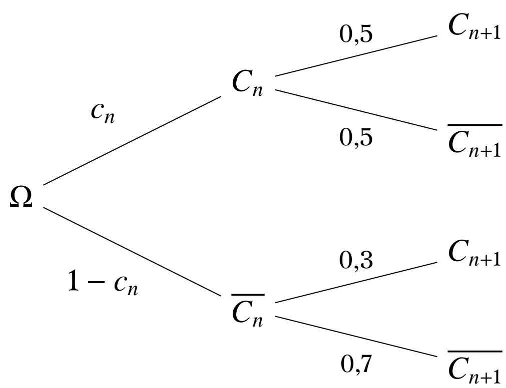
$$\begin{aligned} \ln a + 1 < 0 &\iff \ln a < -1 \\ &\iff a < \mathrm{e}^{-1} \\ &\iff \boxed{a < \frac{1}{\mathrm{e}}} \end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

L'abscisse du point d'intersection entre T_a et et l'axe des abscisses est la solution si elle existe de l'équation $(1-a)x + a = 0 \iff x = \dfrac{-a}{1-a} = \boxed{\dfrac{a}{a-1}}$.

Exercice 10 : VFVV

L'énoncé permet de construire l'arbre probabiliste suivant :



✏ Affirmation A : Vrai

D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} c_2 &= p(C_2) \\ &= p(C_1 \cap C_2) + p(\overline{C_1} \cap C_2) \\ &= p(C_1) \times p_{C_1}(C_2) + p(\overline{C_1}) \times p_{\overline{C_1}}(C_2) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5 + 0{,}9 \times 0{,}3 \\ &= 0{,}05 + 0{,}27 = \boxed{0{,}32} \end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Faux

Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= p(C_{n+1}) \\ &= p(C_n \cap C_{n+1}) + p(\overline{C_n} \cap C_{n+1}) \\ &= c_n \times p_{C_n}(C_{n+1}) + (1-c_n) \times p_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) \\ &= c_n \times 0{,}5 + (1-c_n) \times 0{,}3 \\ &= 0{,}5c_n + 0{,}3 - 0{,}3c_n \\ &= \boxed{0{,}2c_n + 0{,}3} \end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Vrai

On a $8c_n = 8v_n + 3 \implies 8v_n = 8c_n - 3$ et d'après la question précédente, on sait que $c_{n+1} = 0{,}2c_n + 0{,}3$. On peut donc déduire que :

$$\begin{aligned} 8v_{n+1} &= 8c_{n+1} - 3 \\ &= 8(0{,}2c_n + 0{,}3) - 3 \\ &= 1{,}6c_n + 2{,}4 - 3 \\ &= 1{,}6c_n - 0{,}6 \\ &= 0{,}2 \times 8c_n - 0{,}6 \\ &= 0{,}2 \times (8v_n + 3) - 0{,}6 \\ &= 1{,}6v_n + 0{,}6 - 0{,}6 \\ &= 1{,}6v_n \end{aligned}$$

Il vient alors que $8v_{n+1} = 1{,}6v_n \implies v_{n+1} = \frac{1{,}6}{8}v_n \implies v_{n+1} = \frac{16}{8} \times 10^{-1}v_n \implies \boxed{v_{n+1} = 0{,}2v_n}$ et par conséquent la suite (v_n) est géométrique de raison 0,2 et de premier terme v_1.

✏ **Affirmation D : Vrai**

(v_n) étant une suite géométrique, sa forme explicite est $v_n = v_1 \times q^{n-1} = v_1 \times 0{,}2^{n-1}$. On a alors :

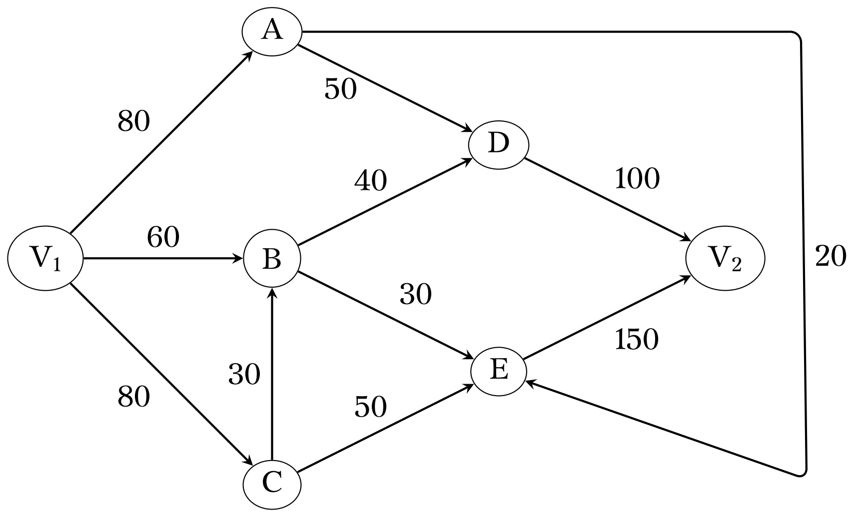
$$\begin{aligned} 8c_n = 8v_n + 3 &\iff c_n = \frac{1}{8}(8v_n + 3) \\ &\iff c_n = v_n + \frac{3}{8} \\ &\iff \boxed{c_n = v_1 \times 0{,}2^{n-1} + \frac{3}{8}} \end{aligned}$$

Or $0 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ et par conséquent $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{3}{8} = 0{,}375}$.

Partie 3 - Problème mathématique

Exercice 11 : VFVF

On peut commencer par faire un graphe pondéré de la situation pour en avoir une vision plus claire. Les poids sur les branches du graphe indiquant le nombre maximum de camions pouvant emprunter la route.



Affirmation A : Vrai

C'est la situation présentée dans laquelle il n'existe que des contraintes entre les villes D, E et V_2 et on note qu'il y a bien un maximum de $100 + 150 = 250$ camions qui peuvent arriver dans cette ville V_2.

Affirmation B : Faux

S'il n'existe que des contraintes entre les villes V_1, A, B et C alors un maximum de $80+60+80 = 220$ camions peuvent partir de V_1.

Affirmation C : Vrai

Si on utilise **uniquement** les routes V_1-C, C-E et E-V_2 alors 80 camions peuvent partir de V_1 pour se rendre dans la ville C mais seulement 50 camions peuvent partir de cette ville pour se rendre en E (donc 30 camions ne prennent pas la route). Finalement, ces 50 camions peuvent emprunter la route pour aller vers V_2 puisque la capacité de transit n'est pas atteinte. On a donc le schéma suivant :

$$\mathrm{V}_1 \xrightarrow[\text{max : 80}]{80} C \xrightarrow[\text{max : 50}]{50} E \xrightarrow[\text{max : 150}]{50} \mathrm{V}_2$$

Affirmation D : Faux

On constate qu'un maximum de 70 camions peuvent prendre le départ de la ville A pour aller en D et en E donc il faut que 70 camions également emprunte la route V_1-A si l'on ne veut pas qu'il y ait des camions qui stagnent dans cette ville A.

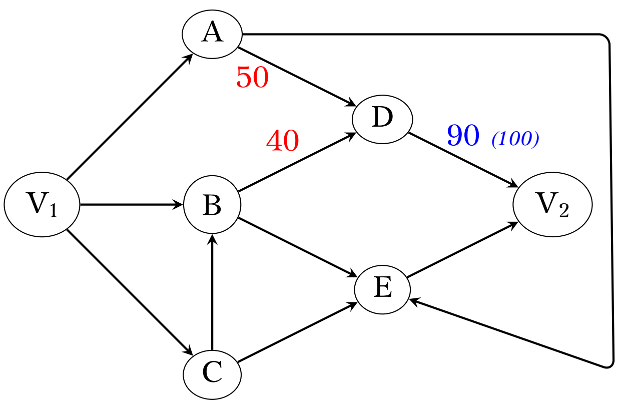
➽ Exercice 12 : VVVV

✏ Affirmation A : Vrai

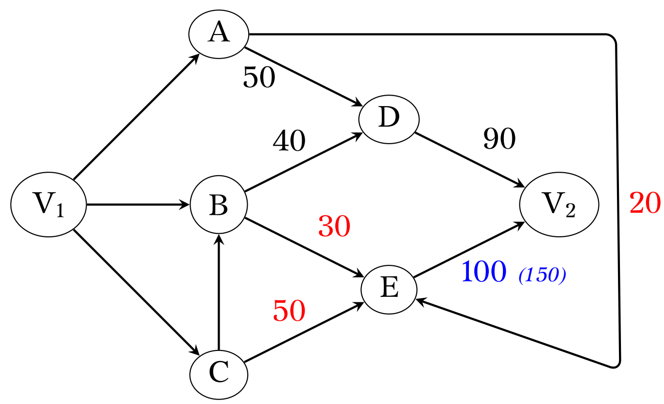
40 camions sur B-D et 30 camions sur B-E donne bien un total de 70 camions maximum pouvant transiter par la ville B.

✏ Affirmation B : Vrai

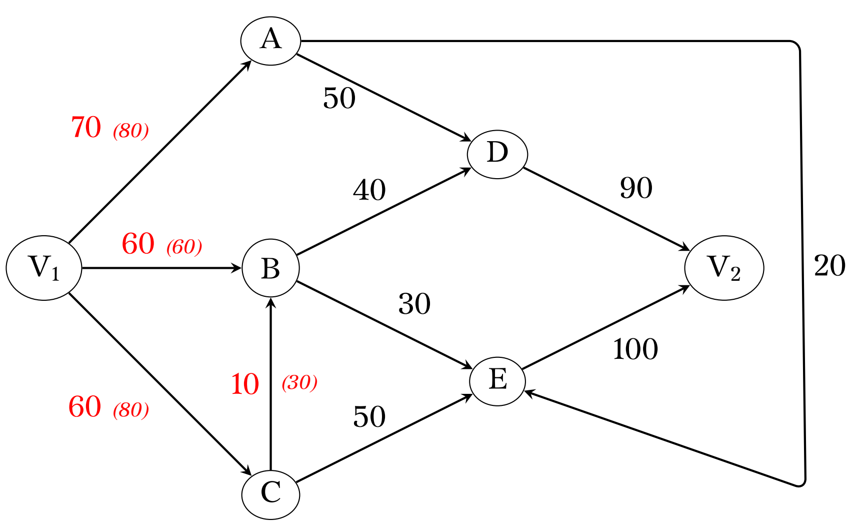
On part du principe que la société disposant de 300 camions, celle-ci peut remplir les routes V_1-A, V_1-B et V_1-C à leur capacité maximale. Toutefois, les trajets suivants vont être contraints par la capacité maximale de chaque route. Elle ne va donc pas remplir les routes au départ de V_1 à leur capacité maximale car dans ce cas, des camions stagneraient dans certaines villes. Ci-dessous, la construction étape par étape :



V_2 peut absorber **tous** les camions provenant de D. Ainsi les routes A-D et B-D sont utilisés à leur capacité maximale.



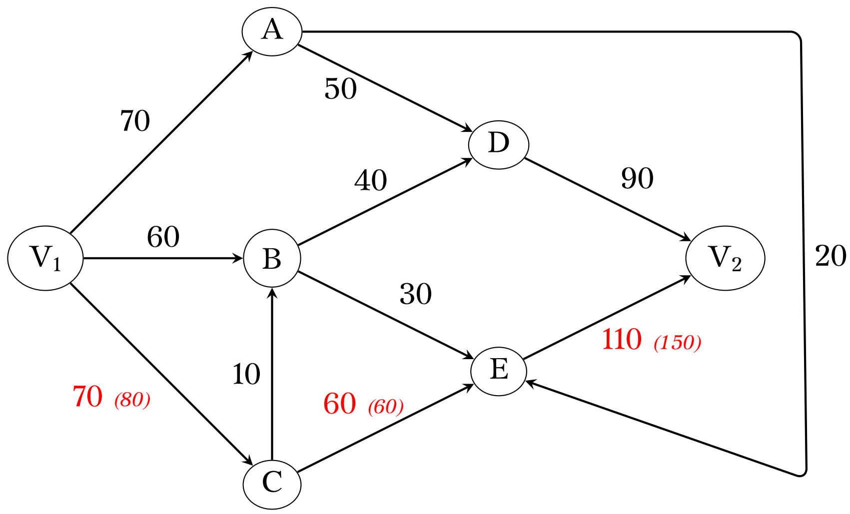
V_2 peut également absorber **tous** les camions provenant de E en exploitant les capacités maximales des routes menant à E.



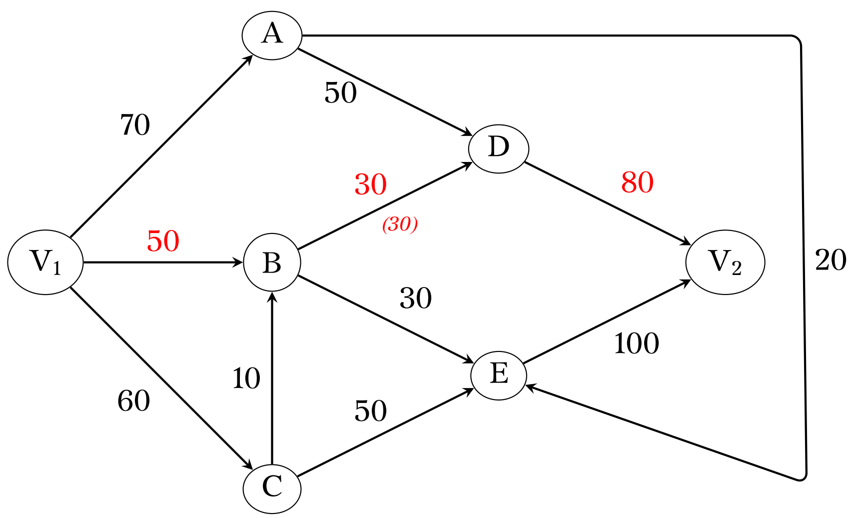
On constate alors que chaque route peut absorber le flux de camions permettant à 190 camions de se rendre sur le chantier de la ville V_2.

✏ **Affirmation C : Vrai**

Une telle modification sur le trajet C-E permettrait effectivement de faire arriver 10 camions supplémentaires en V_2 tout en respectant les contraintes de flux comme le prouve le graphe suivant :



✏ **Affirmation D : Vrai**



Une modification de 10 camions en moins sur le trajet B-D aurait pour conséquence une baisse de 10 camions pouvant se rendre sur le chantier de la ville V_2.

➽ Exercice 13 : FVVF

L'énoncé permet de construire le tableau des probabilités suivant :

	E_2	$\overline{E_2}$	Total
E_1	**0,03**	0,04	**0,07**
$\overline{E_1}$	0,02	0,91	0,93
Total	**0,05**	0,95	**1**

✏ **Affirmation A : Faux**

La probabilité $p_1$qu'au moins une des deux routes soit **inutilisable** mardi est :

$$\begin{aligned} p_1 &= p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E_1} \cap E_2) + p(E_1 \cap \overline{E_2}) \\ &= 0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}04 \\ &= \boxed{0{,}9} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation B : Vrai**

La probabilité p_2 qu'au moins une des deux routes soit **utilisable** mardi est :

$$\begin{aligned} p_2 &= p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) + p(\overline{E_1} \cap E_2) + p(E_1 \cap \overline{E_2}) \\ &= 0{,}91 + 0{,}03 + 0{,}02 \\ &= \boxed{0{,}97} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation C : Vrai**

La probabilité p_3 que les deux routes soient utilisable mardi est :

$$\begin{aligned} p_3 &= p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) \\ &= \boxed{0{,}91} \end{aligned}$$

✏ **Affirmation D : Faux**

Nous avons vu à l'affirmation B de l'exercice 12 que dans le scénario envisagé par l'entreprise, celle-ci peut acheminer 190 camions dans la ville V_2. Si les deux routes D-V_2 et E-V_2 sont bloquées mardi, alors la société ne va acheminer qu'un cinquième du maximum de camions autorisés soit $190 \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{38 \times \cancel{5}}{\cancel{5}} = 38$ camions.

➽ Exercice 14 : FFVV

✏ Affirmation A : Faux

La partie 3 est un pavé droit de dimension g mètres par $3p$ mètres par l mètres donc son volume noté $\mathcal{V}_3$ est :

$$\mathcal{V}_3 = g \times 3p \times l = \boxed{3gpl\,\mathrm{m}^3}$$

✏ Affirmation B : Faux

La partie 2 peut être vu comme un solide de hauteur l et dont la base est un trapèze dont les deux côtés parallèles ont pour longueur p et $3p$ mètres. Son volume $\mathcal{V}_2$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{A}_{\text{trapèze}} \times l \\ &= \frac{(p+3p)\times f}{2} \times l \\ &= \frac{4p \times f}{2} \times l \\ &= \boxed{2flp\,\mathrm{m}^3}\end{aligned}$$

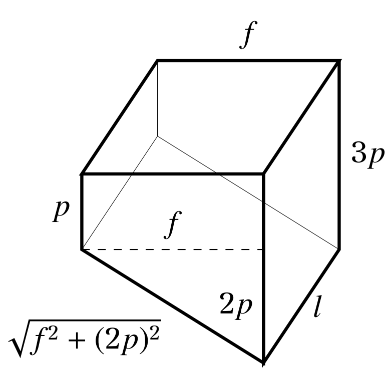
✏ Affirmation C : Vrai

La partie 1 est un pavé droit de dimension e mètres par p mètres par l mètres donc le volume total de la piscine est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 \\ &= elp + 2flp + 3glp \\ &= \boxed{lp(3g + 2f + e)\,\mathrm{m}^3}\end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Vrai

Le sol se compose de 3 rectangles, l'un de dimension l par e mètres, un autre de dimension l par g mètres et enfin un dernier dont la surface au sol s'obtient en utlisant le théorème de Pythagore afin de déterminer une des deux dimensions du rectangle.



La surface totale à carreler est alors égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= el + gl + l\sqrt{f^2 + 4p^2} \\ &= \boxed{l\left(e + g + \sqrt{4p^2 + f^2}\right)\mathrm{m}^2}\end{aligned}$$

➠ Exercice 15 : FVFF

✏ Affirmation A : Faux

D'après l'exercice précédent et les dimensions chiffrées de la piscine gigantesque, on déduit que la surface à carreler est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= l\left(e+g+\sqrt{4p^2+f^2}\right)\\
&= 15\left(20+20+\sqrt{4\times 1^2+30^2}\right)\\
&\simeq 15\left(40+\sqrt{30^2}\right) \qquad \text{car } \sqrt{4+x^2}\simeq\sqrt{x^2} \text{ si } x^2 \text{ est "grand" devant } 4\\
&\simeq 15(40+30)\\
&\simeq 15\times 70\\
&\simeq \boxed{1\,050\,\mathrm{m}^2}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation B : Vrai

Le volume total de la piscine est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= lp(3g+2f+e)\\
&= 15\times 1\times(3\times 20+2\times 30+20)\\
&= 15\times 140\\
&= \boxed{2\,100\,\mathrm{m}^3}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation C : Faux

Le débit d_1 de la pompe P_1 s'obtient en divisant le volume total en litres de la piscine par le temps en minutes nécessaire à son remplissage soit :

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{2\,100\times 10^3}{20\times 60}\\
&= \frac{\cancel{3}\times 7\times\cancel{100}\times 10^3}{2\times 2\times\cancel{3}\times\cancel{100}}\\
&= \frac{7}{4}\times 10^3\\
&= 1{,}75\times 10^3 = \boxed{1\,750\,\mathrm{L/min}}
\end{aligned}$$

✏ Affirmation D : Faux

Si on fait la supposition que $d_1 = d_2$ les pompes P_1 et P_2 pourraient remplir ensemble la piscine en 10 h.

Or Lorsque les deux pompes fonctionne en même temps, la piscine se remplit en 12 h.

Par conséquent, cela signifie que la pompe P_2 a un débit moins important que celui de P_1 d'où $\boxed{d_2 < d_1}$.